معادلات دیفرانسیل

فهرست مطالب

فصل اول: تعاریف اولیه معادلات دیفرانسیل ۹

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول 11

معادلات مرتبه اول جدائی پذیر (تفکیک پذیر) 11

معادلات دیفرانسیل همگن 13

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کامل 17

عامل انتگرال ساز 19

قضیه اولر: 20

معادله خطی مرتبه اول 25

معادله برنولی 27

معادله ریکاتی 30

معادله لاگرانژ 30

دو کاربرد از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۳۱

دسته‌های منحنی‌ها و مسیرهای قائم 31

مسیرهای قائم در مختصات دکارتی 31

مسیرهای قائم در مختصات قطبی 32

مسیرهای مایل 32

پوش منحنی 33

تست‌های تألیفی فصل اول ۳۴

جواب‌های تألیفی بخش اول 42

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ۵۹

استقلال خطی جوابها 60

معادلات خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت 62

شرط لازم وکافی 66

روش ضرایب نامعین 67

معادلات خطی با ضرایب ثابت (روش اپراتورهای معکوس) 74

نکات تکمیلی 80

معادلات خطی با ضرایب متغیر 84

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم و بالاتر 85

حل معادله دیفرانسیل با استفاده از عملگر 91

تست‌های تألیفی بخش دوم ۹۶

جواب‌های تألیفی بخش دوم 99

فصل سوم: حل معادلات با استفاده از سری‌ها ۱۰۵

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی 105

معادله لژاندر، چند جمله‌ای لژاندر 110

روش توسعه یافته روی توانی، روش فروبنیوس 113

معادله بسل، توابع بسل نوع اول و نوع دوم 116

پاسخ تشریحی تست‌های حل معادلات با استفاده از سری‌ها 124

تست‌های تألیفی بخش سوم ۱۲۸

جواب‌های تألیفی بخش سوم ۱۳۲

فصل چهارم: تبدیل لاپلاس ۱۳۷

تابع گاما 138

تابع دلتای دیراک 138

قضایای تبدیل لاپلاس ۱۳۹

قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی 139

قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب 139

قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع 139

قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال‌های یک تابع 139

قضیه اول انتقال 140

قضیه دوم انتقال 140

قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس 140

قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس: 140

قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع 141

تبدیل لاپلاس مشتق 142

6 . 3 : تبدیل لاپلاس انتگرال 144

6 . 4 : قضایای انتقال 145

6 . 5 : مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس، انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس 149

فصل پنجم: دستگاه معادلات دیفرانسیل ۱۶۷

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول 167

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی 168

روش عملگری حل دستگاه معادلات دیفرانسیل 171

روش لاپلاس برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل 172

تست‌های تألیفی بخش پنجم 177

جواب‌های تألیفی بخش پنجم 179

مجموعه سوالات برگزیده آزمون های سال های گذشته 182

سخن سنجش و دانش

آغاز هر سخن،زیبنده ستایش خالق یکتاست. اوست که بر هر نقشی، نگاری می بندد و بر هر نگاری، زیبایی.

بر هیچ عاقل و فرزانه ای پوشیده نیست که موتور پیشرفت و سربلندی هر کشوری بسته به علم و دانش است و طبق فرموده مقام معظم رهبری: اگر ملتی استقلال می خواهد ، اگر عزت می خواهد، اگر پیشرفت می خواهد باید دانشگاه خود را تقویت کند.

در این راستا، انتشارات سنجش و دانش(جامع ترین مرکز آموزش مکاتبه ای کشور) مفتخر است که سالهای متمادی در جهت خدمت به جامعه علمی کشور و بخصوص داوطلبان مقاطع کاردانی به کارشناسی ، کارشناسی ارشد و همچنین دکترا ، فعالیت می کند.

در این مسیر پر پیچ و خم علم آموزی و پیشرفت، یکی از مشکلاتی که همواره دانشجویان با آن مواجه هستند، از یک طرف گستردگی و پراکندگی منابع مطالعاتی و از طرف دیگر کمبود زمان آزمون کنکور ، جهت پاسخگویی به سوالات است. تا کنون جزوات و کتابهای گوناگونی در جهت رفع این مشکلات به بازار عرضه شده اما باز با این حال، پاسخ گوی نیاز خیلی از داوطلبان نیست، چرا که بعضاً یا خیلی خلاصه و گزیده است یا این که در تشریح مسائل و پاسخ گویی به سوالات از سیستمی استفاده شده که با وجود کامل و جامع بودن اکثراً با توجه به زمان محدود آزمون کنکور، عملاً سر جلسه امتحان قابل استفاده نمی باشد. به این معنا که داوطلب هر چند تسلط کامل به مطالب درسی دارد اما این مطالب در ذهن او از آنچنان انسجام و هماهنگی لازم برخوردار نیست که داوطلب بتواند در یک زمان کم به جواب سوال برسد لذا داوطلب در پاسخ گویی به سوالات دچار کمبود وقت گردیده و عملاً نمی تواند به تمام سوالات آنگونه که از خود انتظار دارد جواب دهد.

انتشارات سنجش و دانش با توجه به این دو مسئله مهم(یکی گستردگی منابع و دیگری زمان کم پاسخ گویی به سوالات کنکور) بر آن شد تا با استفاده از تجربه و علم اساتید مجرب و کارآزموده ، به تولید و انتشار کتبی بپردازد که عین خلاصه و موجز بودن کامل و جامع نیز باشد ، کما این که سعی گردیده در تشریح مسائل از یک سیستم جدید و راهکار میانبری استفاده شود که بدین وسیله مشکل کمبود زمان در جلسه کنکور نیز مرتفع گردد.

نیاز به استفاده از یک سیستم جدید به این دلیل است که توان پاسخ گویی به سوالات کنکور جدای از نیاز به بار علمی، نیازمند یک مهارت و شیوه خاص در تست زنی نیز می باشد. لذا در این خصوص سعی شده مطالب کتاب به گونه ای طرح ریزی و تألیف شود که ، داوطلب خود به خود علاوه بر یاد گیری مطالب به مهارت تست زنی نیز دست پیدا کند.

در آخر از مخاطبین محترم این کتاب نهایت سپاسگزاری و قدر دانی را داریم و امید داریم توانسته باشیم آنچه را که شایسته و برازنده یک دانشجوی ایرانی است ارائه کرده باشیم. از دانشجویان عزیز و اساتید محترم نیز تقاضامندیم ما را از نقطه نظرات و پیشنهادات خود بی بهره نگذارند چرا که تنها افتخار و دست آویز ما نگاه صمیمانه و رضایت بخش شماست.

به امید پیروزی و سربلندی در تمامی عرصه های زندگی

error.azmoon@gmail.com

تلفن 021-6126

فصل اول: تعاریف اولیه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱: یک معادله دیفرانسیل، معادله ای است که ارتباط بین تابع و مشتقات آن و متغیر (های) مستقل موجود در آن تابع را نشان می دهد.

اگر تابع مورد نظر تنها از یک متغیر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل حاکم بر آن از نوع معمولی و در غیر این صورت از نوع مشتقات جزئی خواهد بود.

مثال ۱. معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$xy'+y=1 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y=\sin^2 x \qquad (2)$$

$$(y')^3+x^2yy'=e^x-4x \qquad (3)$$

$$(1-x^2)dy-4xydx=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (5)$$

$$yu_{xx}+3xu_{yy}=u \qquad (6)$$

معادلات (1)، (2)، (3)، (4) معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات (5) و (6) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند.

تعریف۲: بزرگترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می نامند.

در معادلات دیفرانسیل معمولی اگر بتوان معادله را بر حسب بالاترین مرتبه مشتق به صورت یک چند جمله ای نوشت، آن گاه درجه آن چند جمله ای را درجه معادله دیفرانسیل می گوییم.

بطور کلی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام با متغیر مستقل x و متغیر وابسته y را به صورت $F(x,y,y',...,y^n)=0$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل معادلات (1) و (3) و (4) از مرتبه اول و معادله (2) از مرتبه دوم است و همچنین معادلات (1) و (2) و (4) درجه یک و معادله (3) درجه سه هستند.

مثال ۲. درجه و مرتبه معادله دیفرانسیل $x^2y'''y'+e^xy'=(x^2+2)y^2$ را مشخص کنید.

معادله فوق از مرتبه سه و درجه یک است.

تعریف ۳: هر معادله به صورت زیر را معادله دیفرانسیل خطی می گوییم.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

در این نوع معادلات ضرایب متغیر وابسته و مشتقات، تنها تابعی از x می باشند که توان مشتقات و متغیر وابسته برابر یک است. به معادله ای که خطی نباشد غیرخطی می گوییم.

تعریف ۴: تابع y=f(x) را یک جواب معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ می گوییم، هرگاه در معادله صدق کند.

تعریف ۵: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جوابی است که شامل یک یا چند ثابت دلخواه بوده و اگر هر مقدار دلخواهی را بـه ثابت‌ها نسبت دهیم و حاصل کار در معادله مورد نظر صدق نماید.

ثابت می شود ، هر معادله دیفرانسیل مرتبه n ام معمولی در جواب عمومی خود می تواند شامل n ثابت اختیاری (پارامتر) باشد.

اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه یا مرزی داده شده در مسأله قرار داده و ثابت هـا را تعیـین کنـیم، جـواب حاصـله را جـواب خصوصی معادله تحت آن شرایط می‌نامیم .

تعریف۶: جواب غیر عادی یک معادله دیفرانسیل تابعی است که بر تمام منحنی های مربوط به جواب عمومی مماس می باشـد، در ضمن (I) جواب غیر عادی از جواب عمومی بدست نمی آید (II) معادلات خطی جواب غیرعادی ندارند.

مثال۳. معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=16$ با شرط اولیه ۴=y(۰) را در نظر بگیرید.

این معادله دارای جواب عمومی $(x-c)^2+y^2=16$ است زیرا در معادله صدق مـی کنـد. همچنـین از شـرط اولیـه داده شـده خواهیم داشت c=0، از این رو $x^2+y^2=16$ یک جـواب خصوصـی معادلـه دیفرانسـیل اسـت. از طرفـی بـدیهی اسـت خطـوط $y=\pm 4$ نیز جواب معادله خواهد بود.

مثال۴. معادله پارامتری $y=cx-c^2$ جواب عمومی معادله دیفرانسـیل $y'^2-xy'+y=0$ مـی باشـد. ایـن معادلـه دیفرانسیل دارای جوابی به صورت $y=\dfrac{x^2}{4}$ است که از جواب عمومی بدست نمی آید (جواب غیرعادی)

مثال۵. نشان دهید $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}$ جوابی از معادله دیفرانسیل $y'-2xy=0$ می باشد.

حل:

$$y'=2xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt+1\right)+1$$

$$y'-2xy=2xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt+1\right)+1-2xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt+1\right)=1$$

نکته: معادله دیفرانسیل هر خانواده منحنی چون $g(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)$ شـامل n پـارامتر مسـتقل $c_1,c_2,\dots,c_n$ را مـی تـوان بـا n بـار مشــتق گیــری از g و حــذف n پــارامتر بــین g و مشــتقات آن بــه صــورت یــک معادلــه دیفرانســیل مرتبــه n ام بــه شــکل $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ بدست آورد.

مثال۶. معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت A در معادله تابع y=Acos۲x+sin۲x را به دست آورید؟

حل:

$$\begin{cases} y-\sin 2x = A\cos 2x & (I) \\ y'-2\cos 2x=-2A\sin 2x & (II) \end{cases} \rightarrow \frac{y'-2\cos 2x}{y-\sin 2x}=\frac{-2A\sin 2x}{A\cos 2x}$$

$$(y'-2\cos 2x)\cos 2x+2\sin(y-\sin 2x)=0 \rightarrow (\cos 2x)y'+(2\sin 2x)y=2$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y = Ae^{x} + Be^{2x} \\ y' = Ae^{x} + 2Be^{2x} \\ y'' = Ae^{x} + 4Be^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' - y = Be^{2x} \\ y'' - y' = 2Be^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

نکته: برای یافتن معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت های $c_1, c_2, \ldots, c_n$ در رابطه $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ کافی است دترمینان زیر بسط داده شود.

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x) & \cdots & f_n(x) & y \\ f'(x) & f_2'(x) & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

کلی ترین وضعیت بیان یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $f(x,y,y')=0$ می باشد، که ممکن است بتوان آن را در وضعیت های خاص حل نمود.

معادلات مرتبه اول جدائی پذیر (تفکیک پذیر)

هرگاه در معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=f(x,y)$ داشته باشیم $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ که در آن f_1 تنها تابعی از x و f_2 تنها تابعی از y باشد، معادله تفکیک‌پذیر (جداشدنی) نامیده می‌شود.

$$y' = f(x,y) \rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بنابراین جهت حل کافی است که معادله فوق را به صورت زیردر آورده و از آن انتگرال گرفت تا جواب عمومی بدست آید.

$$y' = f_1(x) f_2(y) \rightarrow f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

نکته: در معادلات دیفرانسیلی به صورت $y'=f(ax+by+c)$ با جانشینی $u(x)=ax+by+c$ که نتیجه می دهد: $u'(x)=a+by'$ به یک معادله جدائی پذیر به صورت $\frac{du}{a+bf(u)} = dx$ برای $u(x)$ خواهید رسید.

نکته : در معادلات دیفرانسیلی به صورت $yp(xy)dx+xQ(xy)dy=0$ با جانشینی $u=xy$ که نتیجه می دهد $du=ydx+xdy$ یا $u'=y+xy'$ می توان به یک معادله جدائی پذیر برحسب u رسید.

مثال۸. مطلوبست پاسخ معادله دیفرانسیل $y' = e^{2x-3y} + x^3 e^{-3y}$ که شرط $y(0)=0$ در آن صدق کند.

حل:

$$e^{3y}dy = \left[e^{2x} + x^3\right]dx \rightarrow \frac{1}{3}e^{3y} = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^4}{4} + c$$

$$y(0)=0 \rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{2}+c \rightarrow c=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}e^{3y}=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6} \rightarrow y=\frac{1}{3}Ln\left[\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}\right]$$

مثال۹. معادله دیفرانسیل $y-2xy'=3(1+x^2y')$ **را حل کنید.**

حل:

$$y-2xy'=3+3x^2y' \rightarrow y-3=2xy'+3x^2y'=(2x+3x^2)y'$$

$$\int\frac{dy}{y-3}=\int\frac{dx}{2x+3x^2}=\int\left[\frac{1}{2x}-\frac{3}{4+6x}\right]dx$$

$$Ln(y-3)=\frac{1}{2}Lnx-\frac{1}{2}Ln(2+3x)+Lnc$$

$$Ln(y-3)=\frac{1}{2}[Lnx-Ln(2+3x)]+Lnc$$

$$\rightarrow y-3=c\sqrt{\frac{x}{2+3x}}$$

$y=3+c\sqrt{\frac{x}{2+3x}}$ جواب عمومی

مثال۱۰. معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\cos^2(x-y+1)$ **را حل کنید.**

حل:

$$u=x-y+1$$

$$\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx}=1-\cos^2 u$$

$$\frac{du}{1-\cos^2 u}=dx \rightarrow \int\frac{du}{\sin^2 u}=x+c \rightarrow -\cos z=x+c$$

جواب عمومی $-\cot(x-y+1)=x+c$

مثال ۱۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y\sin^{-1}(x)dx=\sqrt{1-x^2}\,Lnydy$ **را به دست آورید.**

حل:

$$\int\frac{\sin^{-1}(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{Lnydy}{y}$$

$$(\sin^{-1}(x))^2-(Lny)^2=c$$

تعریف ۷: تابع f(x,y) را همگن از درجه n می نامیم هرگاه:

$$f(lx, ly) = l^n f(x,y)$$

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ و از نوع همگن می گوییم هرگاه توابع N,M هر دو همگن و از یک درجه باشند. در چنین شرایطی با جانشینی y=xu که نتیجه می دهد:

$$y' = u + xu' \qquad \text{یا} \qquad dy = xdu + udx$$

می توان به یک معادله جدائی پذیر برای u رسید.

مثال۱۲. مرتبه توابع همگن زیر ا تعریف کنید.

$$4x^2 + y^2, \frac{x}{y} + \cos\frac{x}{y}, \frac{x+y+4}{x-y}$$

$$1) f(x,y) = 4x^2 + y^2 \rightarrow f(lx, ly) = l^2(4x^2 + y^2) = l^2 f(x,y)$$

همگن مرتبه دوم

$$2) f(x,y) = \frac{x}{y} + \cos\frac{x}{y} \rightarrow f(lx, ly) = f(x,y)$$

همگن مرتبه صفر

$$3) f(x,y) = \frac{x+y+4}{x-y} \rightarrow f(lx, ly) \neq l^n f(x,y)$$

همگن نیست

مثال ۱۳. عبارت $f(x,y) = 2ye^{\frac{y}{x}} - x$ **همگن از درجه اول می باشد زیرا:**

$$f(lx, ly) = 2lye^{\frac{y}{x}} - lx = l(2ye^{\frac{y}{x}} - x)$$

مثال۱۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(2ye^{\frac{y}{x}})y' + 2x + y = 0$$

را بدست آورید.

حل:

معادله دیفرانسیل مذکور همگن است زیرا

$$(2x+y)dx + (2ye^{\frac{y}{x}} - x)dy = 0$$

$$M(x,y) = 2x + y \rightarrow M(lx, ly) = l(2x+y)$$

$$N(x,y) = 2ye^{\frac{y}{x}} - x \rightarrow N(lx, ly) = l(2ye^{\frac{y}{x}} - x)$$

حل:

$$(2x+y)dx+(2ye^{\frac{y}{x}}-x)dy=0$$

$$y=ux$$

$$dy=udx+xdu$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2ue^{u}-1}{2u^{2}e^{u}+2}du$$

$$Ln|x|=-\frac{1}{2}Ln(u^{2}e^{u}+1)+\frac{1}{2}u+c$$

$$u=\frac{y}{x}$$

مثال ۱۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(y-xy')\cos(\frac{y}{x})=x$$

را بدست آورید.

حل:

$$(y-x\sec(\frac{y}{x}))dx=xdy$$

y=ux

$$dy=udx+xdu$$

$$-\int\frac{dx}{x}=\int\cos udu$$

$$-Ln|x|=\sin(\frac{y}{x})+c$$

مثال ۱۶. معادله دیفرانسیل $x^{3}y'=2x^{2}y-3y^{3}$ را حل کنید.

حل:

$$y'=\frac{y}{x}-3\left[\frac{y}{x}\right]^{3}$$

معادله دیفرانسیل فوق همگن است بنابراین:

y=ux

$$dy=udx+xdu \qquad udx+xdu=(u-3u^{3})dx \qquad u+x\frac{du}{dx}=u-3u^{3}$$

$$x\frac{du}{dx}=-3u^{3} \qquad \int\frac{du}{-3u^{3}}=\int\frac{dx}{x}\rightarrow+\frac{1}{6}u^{-2}=Ln(cx)$$

$$\frac{}{6}\frac{}{y^2}=Ln(cx)\rightarrow y^{٤}=\frac{}{6Ln(cx)}\rightarrow y=\frac{}{\sqrt{6Ln(cx)}}$$

نکته: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $y'=f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن می باشند و با تغییر متغیر y=ux، y'=u+xu' به معادله جداشدنی تبدیل می شود.

نکته: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $y'=f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right)$ همگن نیستند ولی می توان با تغییر متغیر مناسب آنها را به معادلات همگن تبدیل کرد.

الف) اگر صورت و مخرج دو خط موازی باشند $\left(\frac{a}{d}=\frac{b}{e}\right)$ باشند با تغییر متغیر u=ax+by معادله تبدیل به معادله جداشدنی می‌شود.

ب) اگر صورت و مخرج دو خط موازی نباشند و همدیگر را در نقطه (x_0,y_0) قطع کنند با تغییر متغیر $x=X+x_0$ و $y=Y+y_0$ معادله را به صورت زیر تبدیل می کنیم.

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX\ +bY}{dX\ +eY}\right)$$

مثال ۱۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=-\frac{6x+2y+3}{3x+y+2}$ **را بدست آورید.**

حل:

$$y'=-\frac{2(3x+y)+3}{3x+y+2}$$

$$u=3x+y$$

$$du=3dx+dy\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-3$$

$$\frac{du}{dx}-3=-\frac{2u+3}{u+2}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u+3}{u+2}\rightarrow\frac{u+2}{u+3}du=dx$$

$$\int dx=\int(1-\frac{1}{u+3})du$$

$$x=u-Ln|u+3|+c$$

$$x=3x+y-Ln|3x+y+3|+c$$

$$Ln|3x+y+3|-2x-y=c$$

مثال ۱۸. حل معادله $y'=\left(\frac{\breve{}}{x+y-1}\right)$ **را به دست اورید؟**

حل:

$$\begin{array}{l} 4y+8=0 \\ x+y-1=0 \end{array} \rightarrow (x_0,y_0)=(3,-2) \rightarrow \begin{cases} x=X+3 \\ y=Y-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx=dX \\ dy=dY \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y}{X+Y} \rightarrow \frac{dY}{dX}=\frac{Y/X}{1+Y/X}$$

$$Y=uX \rightarrow Y'=u+Xu' \rightarrow u+Xu'=\frac{u}{1+u}$$

$$\int \frac{dX}{X}=-\int \frac{1+u}{u^2}du \rightarrow LnX+Lnc=\frac{1}{u}-Lnu$$

$$LncXu=\frac{1}{u} \rightarrow cY=\frac{X}{Y} \rightarrow (y+2)Lnc(y+2)=x-3$$

مثال ۱۹. معادله دیفرانسیل $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$ **را حل کنید.**

حل: دو خط $x-y+4=0, x+y-2=0$ متقاطع هستند و محل برخورد آنها (-1،3) است.

$$\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx=dX \\ dy=dY \end{cases}$$

$$(X+Y)dX+(X-Y)dY=0 \rightarrow Y'=-\frac{X+Y}{X-Y}$$

$$Y=uc \rightarrow Y'=u+Xu' \rightarrow u+Xu'=-\frac{1+u}{1-u}$$

$$\int \frac{dX}{X}=\int \frac{1-u}{u^2-2u-1}du \rightarrow LnX+\frac{1}{2}|u^2-2u-1|=Lnc$$

$$Ln(X\sqrt{u^2-2u-1})=Lnc \rightarrow X\sqrt{u^2-2u-1}=c$$

$$(x+1)^2\left[\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}-2\frac{(y-3)}{(x+1)}-1\right]=c$$

$$y^2-x^2-2xy+4x-8y=c$$

مثال ۲۰. معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-1}{4x+2y-4}$ **را حل کنید.**

حل: دو خط $4x+2y-4=0, 2x+y-1=0$ موازی هستند بنابراین:

$$u=2x+y \rightarrow \frac{du}{dx}=2+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{}{dx} = 2 + \frac{}{2u-4} \rightarrow \frac{}{5u-9} du = dx \rightarrow \int \frac{}{5u-9} du = \int dx$$

$$\frac{2}{5}u - \frac{2}{25}Ln(5u-9) + c = x$$

$$\frac{2}{5}(2x+y) - \frac{2}{25}Ln(10x+5y-9) + c = x$$

$$\frac{-1}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2}{25}Ln(10x+5y-9) + c = 0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از نوع کامل

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را کامل گوئیم هرگاه:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

و یا به تغییری تابعی مانند u(x,y) وجود داشته باشد به نحوی که:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

در چنین شرایطی با یافتن u از معادلات فوق، جواب عمومی به صورت u(x,y)=c قابل بیان است.

نکته: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل باشد، برای محاسبه تابع پتانسیل u(x,y) کافی است از جملات شامل y در M صرف‌نظر کرده و از سایر جملات M نسبت به x و از تمامی N نسبت به y انتگرال بگیریم. همچنین می توان جملات شامل x در N را حذف نموده و به روش بالا را تعیین کرد.

مثال ۲۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(y^2e^{xy} + \cos x)dx + (e^{xy} + xye^{xy})dy = 0$$

را تعیین نمایید.

حل:

$$M(x,y) = y^2e^{xy} + \cos x \qquad N(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

شرط کامل بودن معادله

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{xy} + \cos x) = 2ye^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + xye^{xy})$$

معادله دیفرانسیل، کامل می باشد.

برای یافتن تابع پتانسیل u(x,y)، می توان از رابطه $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ استفاده کرد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 e^{xy} + \cos x \rightarrow u(x,y) = ye^{xy} + \sin x + g(y)$$

و همچنین با توجه به رابطه $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy} + g'(y) = N(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = c$$

بنابراین تابع u(x,y) به صورت رابطه زیر محاسبه می شود.

$$u(x,y) = ye^{xy} + \sin x + c$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارتست از:

$$ye^{xy} + \sin x = c'$$

مثال ۲۲. حل معادله $y' = \frac{xy^2 - 1}{1 - x^2 y}$ در نقطه x=۰ , y=۱ را به دست آورید؟

حل:

$$(1 - x^2 y)dy + (1 - xy^2)dx = 0 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

با توجه به نکته ذکر شده در مبحث معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل، با حذف $-x^2 y$ داریم که

$$dy + (1 - xy^2)dx = 0 \rightarrow y + x - \frac{x^2 y^2}{2} = c$$

$$y(0) = 1 \rightarrow c = 1 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 y^2 - x - y = -1$$

نکته: گاهی اوقات می توان از عباراتی که دیفرانسیل کامل هستند کمک گرفت و معادله دیفرانسیل غیرکامل را حل کرد چند نمونه از این حالات عبارتند از:

$$d(xy) = ydx + xdy$$

$$d(Arc\tan\frac{y}{x}) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \qquad d(Lnxy) = \frac{xdy + ydx}{xy}$$

$$d(\frac{y}{x}) = \frac{xdy - ydx}{x^2} \qquad d(Ln\frac{y}{x}) = \frac{xdy - ydx}{xy}$$

$$d(Ln(x^2 + y^2)) = \frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}$$

اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد، ولی بتوان تابعی مانند $m(x,y) \neq 0$ را به گونه ای یافت که با ضرب آن در طرفین این معادله، یک معادله دیفرانسیل کامل به دست آید m را یک عامل انتگرال ساز برای معادله مورد نظر می‌گوئیم.

$$m(Mdx + Ndy) = d(f(x,y))$$

نکته: عامل انتگرال ساز m را می توان توسط یکی از روابط زیر به دست آورد.

$$1)\ f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad \rightarrow \quad m(x) = e^{\int f(x)dx}$$

$$2)\ f(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \rightarrow m(y) = e^{\int f(x)dx}$$

$$3)\ f(xy) = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{Ny - Mx} \quad \rightarrow \quad m(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = xy$$

$$4)\ f(\frac{x}{y}) = \frac{y^2(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)}{Mx + Ny} \quad \rightarrow \quad m(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = \frac{x}{y}$$

$$5)\ f(\frac{y}{x}) = \frac{-x^2(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)}{Mx - Ny} \quad \rightarrow \quad m(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = \frac{y}{x}$$

$$6)\ f(x^2 + y^2) = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{2(Nx - My)} \quad \rightarrow \quad m(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = x^2 + y^2$$

$$7)\ f(x + y) = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N - M} \quad \rightarrow \quad m(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = x + y$$

نکته: هرگاه عامل انتگرال‌ساز بصورت تابع ضربی از توان‌های x و توان‌های y باشد یعنی $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ باشد، می‌توان با ضرب کردن طرفین معادله در $x^{\alpha}y^{\beta}$ و اعمال کردن شرط کامل بودن معادله مجهولات α و β را تعیین کرد.

قضیه: اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ کامل نباشد و $u(x,y) = C$ جواب آن باشد آنگاه بی‌نهایت فاکتور انتگرال دارد.

نکته: اگر معادله دیفرانسیل دارای یک فاکتور انتگرال باشد آنگاه دارای بی‌نهایت فاکتور انتگرال است.

نکته: اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ همگن باشد و $Mx + Ny \neq 0$ آنگاه فاکتور انتگرال عبارتست از:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{Mx + Ny}$$

اگر $F(x,y)$ **تابعی همگن از درجه n نسبت به x و y باشد یعنی داریم:**

$$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n}F(x,y) \quad \rightarrow \quad x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=KF$$

نکته: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ به فرم $yf_1(x,y)dx+xf_2(xy)dy=0$ باشد آنگاه دارای فاکتور انتگرالی به صورت زیر است:

$$\mu=\frac{1}{Mx-Ny} \qquad f_1(xy)\neq f_2(xy)$$

مثال: عامل انتگرال ساز معادله روبرو را به دست آورید؟

$$y(x^3y^3+3)dx+x(3-3x^3y^3)dy=0$$

حل:

$$\mu=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{4x^4y^4}$$

مثال: فاکتور معادله دیفرانسیل $(xy^2+y^3)dx+(x^3+x^2y)$ **را به دست آورید؟**

$$f(x,y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{Ny-Mx}==\frac{(2xy-3y^2)(3x^2+2xy)}{x^3y+x^2y^2-x^2y^2-y^3x}=\frac{3(y-x)(y+x)}{xy(x-y)(x+y)}$$

$$\rightarrow \quad f(x,y)=\frac{-3}{xy} \quad \rightarrow \quad \mu(z)=e^{\int f(z)dz} \qquad z=xy$$

$$\rightarrow \quad \mu=e^{\int \frac{-3}{z}}=\frac{1}{z^3}=\frac{1}{x^3y^3}$$

مثال. عامل انتگرال ساز معادله $\left(x^2+\frac{3x^3}{y}\right)dx+\left(\frac{x^4}{y^2}+\frac{x^3}{y}\right)dy=0$ **را به دست آورید؟**

حل:

بدیهی ست این معادله کامل نیست. فرض می‌کنیم معادله دارای عامل انتگرال‌سازی بصورت $\mu(x,y)x^{\alpha}y^{\beta}$ داشته باشد، در این صورت با ضرب کردن در طرفین معادله داریم:

$$\left(x^{\alpha+2}y^{\beta}+3x^{\alpha+3}y^{\beta-a}\right)dx+\left(x^{\alpha+4}y^{\beta-2}+x^{\alpha+3}y^{\beta-1}\right)dy=0$$

با اعمال کردن شرط کامل بودن معادله یعنی $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ داریم:

$$\beta x^{\alpha+2}y^{\beta-1}+3(\beta-1)x^{\alpha+3}y^{\beta-2}=(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta-2}+(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta-1}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\left\{3\beta - 3 = \alpha + 4\right.$$

از این رو $\beta = 2$ و $\alpha = -1$ و در نتیجه $\mu = x^{-1}y^{2}$

مثال: مقدار b در معادله دیفرانسیل زیر را بطوریکه معادله کامل شود، به دست آورید؟

$$\left(ye^{2xy} + x\right)dx + bxe^{2xy}dy = 0$$

حل:

به منظور کامل شدن معادله دیفرانسیل می‌بایست شرط $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ در معادله صدق کند.

بنابراین

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{2xy} + 2xye^{2xy}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = be^{2xy} + 2byxe^{2xy}$$

$$\rightarrow \quad e^{2xy} + 2xye^{2xy} = be^{2xy} + 2byxe^{2xy}$$

$$\rightarrow \quad b = 1$$

مثال ۲۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(y - xy^{2})dx - (x + x^{2}y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 - 2xy$$

$$f(xy) = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{Ny - Mx} = \frac{1 - 2xy + 1 + 2xy}{-xy - x^{2}y^{2} - xy + x^{2}y^{2}} = -\frac{1}{xy}$$

$$m(z) = e^{\int -\frac{1}{z}dz} = e^{-Lnz} \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{xy}$$

طرفین معادله را در m ضرب می کنیم.

$$(\frac{1}{x} - y)dx - (\frac{1}{y} + x)dy = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - d(xy) = 0$$

$$Lnx - Lny - xy + Lnc = 0 \quad \rightarrow \quad xy = Ln(\frac{cx}{y})$$

$$e^{xy} = \frac{cx}{y} \quad \rightarrow \quad y = cxe^{-xy}$$

حل:

با توجه به اینکه $\frac{\partial M}{\partial y}=4y, {\partial N}/{\partial x}=2y$ لذا معادله کامل نیست. از طرفی چون

$$f(x)=\frac{{\partial M}/{\partial y}-{\partial N}/{\partial x}}{N}=\frac{1}{x}$$

بنابراین معادله عامل انتگرال سازی بصورت زیر دارد.

$$m(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{Lnx}=x$$

از این رو با ضرب کردن $m(x)=x$ در طرفین معادله داریم:

$$(2xy^2+3x^2)dx+2x^2ydy=0$$

که معادله ای کامل است. بنابراین جواب عمومی آن عبارتست از:

$$x^2y^2+x^2+c=0$$

مثال ۲۵. عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید، سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل را تعیین کنید.

$$ydx-(x^2+y^2+x)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-(2x+1)$$

$$f(x^2+y^2)=\frac{{\partial M}/{\partial y}-{\partial N}/{\partial x}}{2(Nx-My)}=\frac{1+2x+1}{2(-x^3-y^2x-x^2-y^2)}=\frac{2x+2}{-2(x^2+y^2)-2x(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{2(x+1)}{-2(x^2+y^2)(x+1)}=-\frac{1}{x^2+y^2} \qquad z=x^2+y^2$$

$$m=e^{\int f(z)dz}=e^{\int\frac{-1}{z}dz}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

با ضرب کردن طرفین معادله دیفرانسیل در عامل انتگرال ساز داریم:

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx-(1+\frac{x}{x^2+y^2})dy=0$$

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

$$u(x,y)=\int\frac{y}{x^2+y^2}dx+g(y)$$

$$u(x,y)=Arc\tan\frac{x}{y}+g(y)$$

و با توجه به رابطه $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{-x}{y^2} \times \frac{y^2}{x^2+y^2}\right] + g'(y) = \frac{-x}{x^2+y^2} - 1$$

$$g'(y) = -1 \quad \rightarrow \quad g(y) = -y$$

جواب عمومی معادله به شکل زیر بدست می آید.

$$Arc\tan\frac{x}{y} - y = c$$

مثال ۲۶. معادله دیفرانسیل $(x^2+2xy-y^2)dx + (y^2+2xy-x^2)dy = 0$ را حل کنید.

حل:

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x-2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 2y-2x$ با هم برابر نیستند، لذا معادله کامل نیست. از طرفی

$$f(x+y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} = \frac{2x-2y-2y+2x}{y^2+2xy-x^2-x^2-2xy+y} = \frac{-2}{x+y} \qquad z = x+y$$

بنابراین معادله دارای عامل انتگرال سازی بصورت: $m(z) = e^{\int f(z)dz}$

از این رو با ضرب کردن طرفین معادله در عامل انتگرال ساز خواهیم داشت.

$$(1-\frac{2y^2}{(x+y)^2})dx + (1-\frac{2x^2}{(x+y)^2})dy = 0$$

در نتیجه جواب عمومی دیفرانسیل کامل بدست آمده عبارتست از:

$$x + \frac{2y^2}{x+y} + y = c$$

مثال ۲۷. عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $ydx + x(1-3x^2y^2)dy = 0$ را بدست آورید، سپس جواب عمومی آن را تعیین کنید.

$$f(xy) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{1-1+9x^2y^2}{-3x^3y^3} = \frac{-3}{xy} = \frac{-3}{z}$$

$$m = e^{\int \frac{-3}{z}dz} = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{x^3y^3}$$

با ضرب کردن عامل انتگرال ساز در معادله دیفرانسیل داریم:

$$x^{-3}y^{-2}dx + (x^{-2}y^{-3} - 3y^{-1})dy = 0$$

$$\frac{}{\partial y} = M(x,y) \qquad \rightarrow \qquad u(x,y) = \int x \quad y \quad dx$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2} + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \qquad \rightarrow \qquad x^{-2}y^{-3} + g'(y) = x^{-2}y^{-3} - 3y^{-1}$$

$$\rightarrow \quad g'(y) = -3y^{-1} \qquad \rightarrow \qquad g(y) = -3Ln|y|$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2} + (-3Ln|y|)$$

جواب عمومی معادله به صورت زیر محاسبه می شود.

$$x^{-2}y^{-2} + Lny^{6} = c$$

مثال ۲۸. جواب معادله $2y(x^2+y^2)dy + xdy + ydx = 0$ را بدست آورید.

جواب: طرفین معادله را بر x^2+y^2 تقسیم می کنیم.

$$\frac{xdy+ydx}{x^2+y^2} + 2ydy = 0$$

با توجه به نکته بیان شده در خصوص عبارت های دیفرانسیلی کامل جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2) + y^2 = Lnc \quad \rightarrow \quad (x^2+y^2)e^{2y^2} = c$$

مثال ۲۹. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$ydx + 3x^4dx - xdy = 0$$

$$3x^2dx = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

در می یابیم معادله به صورت $d(\frac{y}{x}) = 3x^2dx$ است. لذا با انتگرال گیری داریم:

$$\frac{y}{x} = x^3 + c$$

یا

$$y = (x^3 + c)$$

مثال ۳۰. معادله با مقدار اولیه $y'\tan x + y = \sec x; y(1) = 0$ را در نظر بگیرید.

حل:

با ضرب طرفین معادله در cosx داریم:

$$y'\sin x + y\cos x = 1$$

$$d(y\sin x) = 1$$

با انتگرال گیری خواهید داشت:

مثال ۳۱. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را بدست می آوریم.

$$(x+4x^3\sqrt{x^2-y^2})dx-ydx=0 \qquad ; \qquad y(1)=0$$

حل:

با نوشتن معادله به صورت:

$$xdx-ydy+4x^3\sqrt{x^2-y^2}dx=0$$

$$\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}+4x^3dx=0$$

می بینیم معادله به صورت

$$d(\sqrt{x^2-y^2})+d(x^4)=0$$

است. لذا با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\sqrt{x^2-y^2}+x^4=c$$

از شرط y(1)=0 نتیجه می شود c=2، بنابراین جواب مسأله عبارتست از:

$$\sqrt{x^2-y^2}+x^4=2$$

مثال ۳۲. حاصل عبارت $x^2\frac{dy}{dx}+xy+\sqrt{1-x^2y^2}=0$ **را به دست آورید؟**

حل:

$$x(xdy+ydx)+\sqrt{1-x^2y^2}dx=0 \to \frac{xdy+ydx}{\sqrt{1-xy}}+\frac{dx}{x}0$$

طرفین معادله در $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2y^2}}$ ضرب شده است. $\qquad \sin^{-1}(xy)+Lnx=c$

معادله خطی مرتبه اول

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی در حالتی کلی به صورت زیر بیان می شود.

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=q(x)$$

اگر در معادله فوق q(x)=0 آنگاه معادله دیفرانسیل را همگن و در غیر اینصورت غیرهمگن می دانیم.

نکته: چنانچه در معادله خطی مرتبه اول جمله $\frac{dy}{dx}$ دارای ضریب $A(x)$ باشد. ابتدا طرفین معادله را بر $A(x)\neq 0$ تقسیم می‌کنیم.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول عبارتست از:

$$y = e \left[\int q(x)e \quad dx + c\right]$$

نکته: جواب عمومی دیفرانسیل به فرم $\frac{dx}{dy}+xp(y)=q(y)$ همانند جواب فوق است با این فرق که جای y,x عوض می‌شود.

مثال ۳۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

حل:

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)$$

$$y=e^{2\int\frac{dx}{x+1}}\left(\int (x+1)^3 e^{-2\int\frac{dx}{x+1}}dx+c\right)$$

$$y=(x+1)^2\left(\int (x+1)dx+c\right)$$

$$y=(x+1)^2\left(\frac{x^2}{2}+x+c\right)$$

مثال ۳۳. معادله دیفرانسیل $yLnydx+(x-Lny)dy=0$ را حل کنید.

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{yLny}=\frac{1}{y}$$

$$x=e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy+c\right]$$

$$x=e^{\int\frac{dy}{yLny}}\left[\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{dy}{yLny}}dy+c\right]=e^{-Ln(Lny)}\left[\int\frac{1}{y}e^{Ln(Lny)}dy+c\right]$$

$$xLny=\left[\int\frac{Lny}{y}dy+c\right]=\frac{1}{2}(Lny)^2+c\rightarrow 2xLny=(Lny)^2+c$$

نکته: گاهی اوقات معادله بر حسب y خطی نیست ولی بر حسب u=f(y) خطی است در این حالت با استفاده از تغییر متغیر u=f(y) به معادله خطی تبدیل می‌شود.

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)p(x)=q(x)\rightarrow u'+up(x)=q(x)$$

مثال ۳۳. حاصل معادله دیفرانسیل $y'+2=x^2e^{-y}$ را به دست آورید؟

حل:

$$y'e^y+2e^y=x^2 \qquad e^y=u \qquad y'e^y=u'$$

$$u'+2u=x^2$$

$$u=e^{-2x}\left[\int x^2e^{2x}+c\right]=e^{-2x}\left[\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c\right]$$

$$\rightarrow u=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+ce^{-2x}$$

$$Ln(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+ce^{-2x}) \rightarrow$$

معادله برنولی

صورت کلی معادله برنولی بصورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=y^n q(x)$$

برای حل معادله برنولی طرفین معادله را بر y^n تقسیم کرده و سپس به کمک تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ آن را به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می کنیم.

$$u=y^{1-n} \rightarrow u'=(1-n)y^{-n}y' \rightarrow u'+(1-n)up(x)=(1-n)q(x)$$

بنابراین با حل معادله دیفرانسیل خطی بدست آمده می توان فرمول جواب عمومی معادله دیفرانسیل برنولی را به شکل زیر محاسبه کرد.

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left((1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+c\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

نکته: معادله دیفرانسیل برنولی می‌تواند بر حسب x به عنوان متغیر تابع و y به عنوان متغیر مستقل باشد.

$$\frac{dx}{dy}+xp(y)=x^n q(y) \rightarrow u'+(1-n)u(y)=(1-n)q(y)$$

مثال ۳۴-جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^2dx=(x^3-xy)dy$ را بدست آورید.

حل:

معادله دیفرانسیل بر حسب x برنولی است.

$$\frac{dx}{dy}+y^{-1}x=y^{-2}x^3$$

$$x=e^{-\int y^{-1}dy}(-2\int y^{-2}e^{-2\int y^{-1}dy}dy+c)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x=y^{-1}(\frac{2}{3}y^{-3}+c)^{-\frac{1}{2}}$$

معادلات مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نمی شوند

در حالتهای قبلی که بررسی کردیم y' به طور صریح نسبت به x,y بیان شده بود $(y'=f(x,y))$ حال بـه بررسـی حـالاتی کـه y' به طور صریح نسبت به x,y بیان نشده است می پردازیم.

الف) اگر معاله دیفرانسیل $f(x,y,y')=0$ به آسانی بر حسب xقابل بیان باشد.

$$x=f(y,y') \qquad\qquad y'=p \rightarrow x=f(y,p)$$

نباشد آنگاه جواب عمومی به صورت پارامتری بیان می شود.

$$\begin{Bmatrix} x = f(y,p) \\ \dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

مثال۳۵. جواب های عمومی وغیر عادی معادله زیر را بیابید.

$$x = 2y'^2 + \frac{y}{y'}$$

حل:

با فرض $y' = p$ و دیفرانسیل گیری از طرفین معادله داریم که:

$$y' = p \to dy = pdx$$

$$dx = 4pdp + (pdy - ydp) \,|\, p^2 \to \frac{dx}{dy} = 4p\frac{dp}{dy} + \frac{p - y\dfrac{dp}{dy}}{p^2}$$

$$\to \frac{1}{p} = 4p\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy}(4p - \frac{y}{p^2}) = 0 \to \begin{cases} \dfrac{dp}{dy} = 0 \to p = c \\ 4p^3 = y \to p = \sqrt[3]{\dfrac{y}{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2p^2 + \dfrac{y}{p} \\ p = c \end{cases} \to x = 2c^2 + \frac{y}{c} \to y = cx - 2c^3$$

جواب عمومی

$$\begin{cases} x = 2p^2 + \dfrac{y}{p} \\ p = \sqrt[3]{\dfrac{y}{4}} \end{cases} \to x = 2\sqrt[3]{\frac{y^2}{16}} + \frac{y}{\sqrt[3]{\dfrac{y}{4}}}$$

جواب غیر عادی

ب) اگر معادله دیفرانسیل $fc(,y,y')$ به آسانی بر حسب yقابل بیان باشد.

$$y = f(x,y') \qquad y' = p \qquad \to y = f(x,p)$$

و جواب عمومی از حذف p دستگاه زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} y = f(x,p) \\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}.\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

$$y = y'^2 + 2xy + \frac{x^2}{2}$$

$$y' = p \qquad \to dy = pdx$$

$$y = p^2 + 2xp + \frac{x^2}{2} \to dy = 2pdp + 2xdp + 2pdx + xdx$$

$$2p\frac{dp}{dx} + 2x\frac{dp}{dx} + p + x = 0 \qquad \to \qquad \left[1 + 2\frac{dp}{dx}\right] + p\left[\frac{2dp}{dx} + 1\right] = 0$$

$$\to \left(2\frac{dp}{dx} + 1\right)(p + x) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{-1}{2} & \to p = \dfrac{-1}{2}x + c \\ p + x = 0 & \to p = -x \end{cases} \to \qquad \begin{cases} x = 2c - 2p \\ y = p^2 + 4(c - p)p + 2(c - p)^2 \end{cases}$$

$$\to \qquad y = (c - \frac{x}{2})^2 + x(2c - x) + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} p = -x \\ y = p^2 + 2xp + \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \qquad \to y = x^2 - 2x^2 \to y = -\frac{x2}{2}$$

ج) برای معادلات مرتبه اول با درجه دلخواه n به صورت زیر می توان نوشت:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + p_1(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + p_n(x,y) = 0$$

برای حل این نوع معادلات با فرض $\frac{dy}{dx} = p$ معادله را به صورت حاصلضرب فاکتورهای زیر در می آوریم.

$$(p - f_1)(p - f_2)\ldots(p - fn) = 0 \qquad \to \frac{dy}{dx} = f_1(x,y), \ldots \frac{dy}{dx} = fn(x,y)$$

در این صورت جواب عمومی معادله از ضرب کردن جوابهای عمومی هر یک از معادلات مرتبه اول فوق حاصل می شود.

$$f_1(x, y.c)\, f2(x,y,c)\, f3(x,y,c) \ldots fn(x,y,c) = 0$$

مثال ۳۷.معادله $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - (x + 3y + 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (x + 3y + 3xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ **را حل کنید.**

حل: $p^4 - (x + 3y + 1)p^3 + (x + 3y + 3xy)p^2 - 3xyp = 0 \qquad \to \qquad \frac{dy}{dx} = p$

$$p(p - 1)(p - x)(p - 3y) = 0$$

$$\to \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{dy}{dx} = x \qquad \frac{dy}{dx} = 3y$$

$y_1 = c_1 \qquad y_2 = x + c_2 \qquad y3 = \frac{}{2} + c3 \qquad y_4 = c4e$

$(y - c_1)(y - x - c2)(y - \frac{x^2}{2} - c3)(y - c_4 e^{3x})$ جواب کلی

معادله ریکاتی

معادله به صورت $y' + p(x)y = r(x)y^2 + q(x)$ با فرض این که $r(x), q(x)$ مخالف صفر باشند،معادله ریکاتی نام دارد.اگر yp یک جواب خصوصی معادله باشد جا نشینی $y = yp + \frac{1}{u}$ معادله را به معادله مرتبه اول خطی تبدیل می کند.

$u^1 + (2ypr - p)u + r = 0$

و با محاسبه u جواب عمومی معادله ریکاتی بدست می آید.

معادله لاگرانژ

معادله دیفرانسیل روبرو معادله لاگرانژ نامیده میشود.

$y = xf(y') + q(y')$

در حالت خاص که $f(y') = y'$ باشد به معادله کلرو تبدیل میشود.

$y = xy' + g(y')$

توجه شود که جواب عمومی معادله کلرو به صورت روبرو است.

$y = cx + g(c)$

مثال۳۸.جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'}}$ **را به دست آورید؟**

حل: با توجه به نکته گفته شده می توان نوشت:

$y = cx + gcc) = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c}} \qquad (*)$

در ادامه می توان معادله را به طور کامل حل کرد. اگر از طرفین تساوی فوق نسبت به c مشتق بگیریم

$x + \frac{a}{(1+c^2)^{3/2}} = 0$

همچنین اگر از طرفین معادله y=cx+g(c) نسبت به x، مشتق بگیریم .

$y' = c = c + x\frac{dc}{dx} + g'(c)\frac{dc}{dx}$

$[x + g'(c)]\frac{dc}{dx} = 0$

$\rightarrow \qquad x = -g'(c) \qquad (**)$

با حذف c بین دو معاله (*)و(**)خواهیم داشت

$$x^3 + y^3 = a^3$$

دو کاربرد از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

دسته‌های منحنی‌ها و مسیرهای قائم

یک دسته منحنی پارامتری به صورت $f(x,y,c)=0$ داریم که به ازاء هر مقدار پارامتر c یک منحنی در صفحه xy ایجاد می‌کند حال می‌خواهیم یک دسته منحنی پارامتری $g(x,y,k)$ پیدا کنیم که بر دسته منحنی $f(x,y,c)$ عمود باشد. (یعنی زاویه بین مماس‌هایشان در نقطه تقاطع 90 باشد)

مسیرهای قائم در مختصات دکارتی

برای تعیین مسیرهای قائم خانواده منحنی $g(x,y,k)$ به ترتیب زیر می‌توان نوشت:

1) معادله دیفرانسیل g را به صورت $g(x,y,k)$ مرتب می‌کنیم.

2) در f به جای y' مقدار $-\dfrac{1}{y'}$ می‌گذاریم.

3) حل معادله دیفرانسیل قسمت قبل، مسیرهای قائم منحنی g را مشخص می‌کند.

مثال. دسته مسیرهای قائم منحنی‌های $y=\alpha x$ را به دست آورید؟ (α پارامتر است)

حل:

$$y' = \alpha$$

$$y = xy'$$

با تبدیل y' به $\dfrac{1}{y'}$

$$yy' = -x$$

$$\int xdx = -\int ydy \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = \alpha^2$$

مثال. دسته مسیرهای قائم دسته مخروطی‌های $\dfrac{x^2}{C}+\dfrac{y^2}{C-\lambda}=1$ را به دست آورید؟

حل:

$$\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{C-\lambda}=1$$

$$\frac{x}{C}+\frac{yy'}{C-\lambda}=0$$

$$C=\frac{\lambda x}{x+yy'}$$

$$(x+yy')(xy'-y)=\lambda y'$$

با تبدیل y به $\frac{}{y'}$، معادله دیفرانسیل تغییر نمی‌کند، بنابراین دسته مسیرهای قائم دسته مخروطی‌های $1 = \frac{}{C-\lambda} + \frac{}{C}$ بر خود دسته مخروطی‌ها منطبق است.

مثال. معادله مسیرهای قائم بر دسته‌های منحنی $xy^2 = C$ را به دست آورید؟

حل:

با مشتق‌گیری، معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی به دست می‌آید.

$$xy^2 = C$$

$$y^2 + 2xyy' = 0 \quad \rightarrow \quad y + 2xy' = 0$$

معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم عبارتست از:

$$y + 2x\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x}{y'} \quad \rightarrow \quad ydy = 2xdx \quad \rightarrow \quad y^2 - 2x^2 = a$$

مسیرهای قائم در مختصات قطبی

در دستگاه مختصات قطبی برای بدست آوردن مسیرهای قائم یک دسته منحنی مانند $r = f(\theta)$ کافی است در معادله دیفرانسیل به جای $\frac{r'}{r}$ مقدار $\frac{-r}{r'}$ را قرار داده و سپس معادله دیفرانسیل جدید را حل می‌کنیم.

مسیرهای مایل

دسته منحنی $f(x,y,C) = 0$ مفروض است برای بدست آوردن مسیرهایی که با مسیر مذکور زاویه γ می‌توان نوشت:

$$\tan\gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'} \quad \rightarrow \quad m' = \frac{y' - \tan\gamma}{1 + y'\tan\gamma}$$

بنابراین کافی است در معادله دیفرانسیل $f(x,y,C) = 0$ ، y را به $t\frac{y' - \tan\gamma}{1 + y'\tan\gamma}$ تبدیل کنیم.

مثال. دسته مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $r = \alpha(1 - \sin\theta)$ را به دست آورید؟

حل:

$$r = \alpha(1 - \sin\theta)$$

$$dr = -\alpha\cos\theta d\theta \qquad \frac{dr}{d\theta} = -\alpha\cos\theta = \frac{-r\cos\theta}{1 - \sin\theta}$$

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} \xrightarrow{\frac{r'}{r} \to \frac{-r}{r'}} \int \frac{dr}{r} = \int \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} d\theta$$

$$\mathrm{Ln}|r| = \mathrm{Ln}\left|C\sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}}\cos\theta\right|$$

$$r = C(1 + \sin\theta)$$

اصلی به صورت $f\left(r,\theta,\frac{dr}{d\theta}\right)=0$ بیان شود معادله دیفرانسیل قائم به صورت $f\left(r,\theta,-r^2\frac{d\theta}{dr}\right)$ قابل بیان است و از حل آن دسته‌های منحنی‌های قائم بدست می‌آید.

به عنوان مثال می‌توان مسأله قبل را با توجه به نکته ذکر شده به شکل زیر حل کرد.

$$\begin{cases} r=\alpha(1-\sin\theta) \\ \dfrac{dr}{d\theta}=-\alpha\cos\theta \end{cases} \rightarrow \quad \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} \quad \rightarrow \quad -r^2\frac{d\theta}{d^2} \quad \rightarrow \quad \frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}}=\frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dr}{r}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$Lnr=Ln(1+\sin\theta)+C \quad \rightarrow \quad r=C(1+\sin\theta)$$

پوش منحنی

پوش یک خانواده منحنی‌های $\phi(x,y,c)=0$ منحنی‌ای مانند $y=f(x)$ است که بر هریک از اعضای خانواده منحنی‌ها فقط در یک نقطه مماس است.

نکته: برای بدست آوردن پوش خانواده منحنی‌های $\phi(x,y,c)=0$ کافی است که پارامتر C را بین معادلات $\phi(x,y,c)=0$ و $\phi_C(x,y,c)=0$ (مشتق نسبت به C) حذف نمائیم.

مثال. پوش خانواده منحنی‌های $2x\cos\theta+2y\sin\theta=1$ را به دست آورید؟

$$\begin{cases} 2x\cos\theta+2y\sin\theta=1 \\ -2x\sin\theta+2y\cos\theta=0 \end{cases} \rightarrow \quad y=\frac{1}{2}\sin\theta \quad x=\frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\rightarrow \quad x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

تست‌های تألیفی فصل اول

۱- مسیرهای قائم خانواده خطوط $x+2y=2$ را به دست آورید (C پارامتر – دلخواهی است)

الف) $\{2,1\}$ ب) $\{-2,1\}$ ج) $\{2,-1\}$ د) $\{-2,-1\}$

۲- ناحیه‌ای از صفحه xy که در هر نقطه آن وجود و یکتایی جواب معادله زیر تضمین می‌شود کدام است؟

الف) $2x+5y\neq 0$ ب) $2x+5y\neq 0$

ج) $x+4y\neq 0$ د) $x+6y\neq 0$

۳- جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{-4x+y}{x-y}$ کدام است؟

الف) $(y+2x)(y^2-4x^2)$ ب) $(y-2x)^2(y^2+4x^2)=C$

ج) $(y+2x)^2(y^2-4x^2)=C$ د) $(y-2x)(y^2+4x^2)=C$

۴- برای کدام معادله‌ی دیفرانسیل عناصر میدان امتدادی، در همه‌ی نقاط هر خط موازی محور x، متوازی اند؟

الف) $y=x^2+y^2$ ب) $y'=(1-y)(2-y)$

ج) $y'=2xy$ د) $y'=\frac{x}{x-y}$

۵- جواب‌های عمومی معادله‌ای دیفرانسیل $2xyy'=x^2+3y^2$ کدام است؟

الف) $x^2+y^3=cx^3$ ب) $x^2+y^2=cx^3$

ج) $x^2+y^2=cx$ د) $x^3+y^2=cx^2$

۶- جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $2\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$ کدام است؟

الف) $\cos^2 x\sin y=c$ ب) $\cos^2 y\cos y=c$

ج) $\cos^2 x\cos y=c$ د) $\sin^2 n\sin y=c$

۷- جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $2xy'=2y+\sqrt{x^2-y^2}$ کدام است؟

الف) $2\sin^{-1}(\frac{y}{x})=c+\mathrm{Ln}x$ ب) $\sin^{-1}(\frac{y}{x})=c+2\mathrm{Ln}x$

ج) $\cos^{-1}(\frac{y}{x})=c+2\mathrm{Ln}x$ د) $2\cos^{-1}(\frac{y}{x})=c+\mathrm{Ln}x$

۸- مسیرهای قائم خانواده بیضی‌های $x^2 - xy + y^2 = c^2$ کدام است؟

الف) $y + x = c(y - x)^2$ ب) $y + x = c(y - x)^3$

ج) $y - x = c(y + x)^3$ د) $y - x = c(y + x)^2$

۹- اگر جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$ **به صورت** $y = x + \frac{1}{u}$ **باشد آنگاه؛**

الف) $u = cx - x^2$ ب) $u(c - x)^{-1}$

ج) $u = c - x$ د) $u = (cx - x^2)^{-1}$

۱۰- خانواده منحنی‌هایی که خانواده‌ی دوایر $x^2 + y^2 = c^2$ **را به زاویه** 45° **قطع می‌کنند در مختصات قطبی کدام است؟**

الف) $r = ke^{-\theta}$ ب) $r = k\theta$ ج) $r = ke^{\theta}$ د) $r\theta = k$

۱۱- اگر تابع g جوابی از معادله دیفرانسیل $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ **با شرط اولیه‌ی** $g(1) = -1$ **باشد مقدار** $g(\sqrt[3]{4})$ **کدام است؟**

الف) 1 ب) 0 ج) $\frac{\sqrt{31}}{3}$ د) $-\frac{\sqrt{35}}{3}$

۱۲- اگر منحنی‌هایی $x^n + y^n = C_1$ **مسیرهای قائم خانواده‌ی** $y = \frac{x}{1 - c + x}$ **باشند n کدام است؟**

الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

۱۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2x^3y' = y(y^2 + 2x^2)$ **کدام است؟**

الف) $x + y^2(c + Lnx) = 0$ ب) $x^3 + y(c + Lnx) = 0$

ج) $x^2 + y(c + Lnx) = 0$ د) $x^2 + y^2(c + Lnx) = 0$

۱۴- اگر تابع g جوابی از معادله دیفرانسیل $\frac{y'}{y} - x = xy$ **با شرط اولیه** $g(0) = 1$ **باشد آنگاه** $g(\sqrt{2})$ **کدام است؟**

الف) $\frac{2e}{1 - e}$ ب) $\frac{e}{2 + e}$ ج) $\frac{2e}{1 + e}$ د) $\frac{e}{2 - e}$

۱۵- جواب عمومی معادله‌ی $yy'e^{x+y} = 1$ **کدام است؟**

الف) $(y + 1)e^y = c - e^x$ ب) $(y - 1)e^y = c - e^{-x}$

ج) $(y - 1)e^y = c + e^{-x}$ د) $(y + 1)e^y = c + e^x$

۱۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{-}{dx}+y\,\mathrm{tann}\,x=\sec n\ \ x$ کدام است؟

الف) $y=\sinh x+c\tanh x$ ب) $y=\sinh x+\mathrm{csochx}$

ج) $y=\mathrm{sec\,hx}.\tanh x+c\,\mathrm{sec\,hx}$ د) $y=\mathrm{sec\,hx}+c\,\mathrm{sec\,hx}$

۱۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2xy-\sin y)dy+y^2dx=0$ کدام است؟

الف) $xy^2-\cos y=c$ ب) $xy^2+\cos y=c$

ج) $xy^2+\sin y=c$ د) $xy^2-\sin y=c$

۱۸- جواب عمومی معادله $(2x^2y+2x)y'+(2xy^2+2y)=0$ کدام است؟

الف) $x^2g^2+2xy=c$ ب) $x^2y^2-x^2y=c$

ج) $x^2y^2-2xy=c$ د) $x^2y^2+xy^2=c$

۱۹- اگر $u(x,y)$ جواب خصوصی معادله $(\frac{y}{x}+6x)dx+(Lnx-2)dy=0$ با شــرط $y(1)=1$ باشــد و $u(e,1)$ کدام است؛

الف) $3e^2-1$ ب) $3e^2-2$ ج) $3e^2-3$ د) $3e^2-4$

۲۰- اگر معادله دیفرانسیل $(ye^{2xy}+x)dx+bxe^{2xy}dy=0$ کامل باشد **b** کدام است؟

الف) $b=1$ ب) $b=2$ ج) $b-\frac{1}{2}$ د) $b=-1$

۲۱- عامل انتگرال ساز معادله $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dx=0$ کدام است؟

الف) e^{-3x} ب) x^3 ج) e^{3x} د) x^{-3}

۲۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(\sin y-\frac{x}{y})y'=1$ کدام است؟

الف) $xy^2-y\sin y+\cos y=c$

ب) $xy-y\sin g+\cos y=c$

ج) $xy+y\cos y-\sin y=c$

د) $xy^2+y\cos y-\sin y=c$

۲۳- عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $(3x+\frac{\;}{y})+(\frac{\;}{y}+3\frac{\;}{x})y'=0$ به شکل $x^m y^n$ است حاصل $m+n$ برابر است با:

الف) 1 ب) 2 ج) -2 د) -1

۲۴- اگر معادله دیفرانسیل $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$ دارای عامل انتگرال ساز $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xy(2x+y)}$ باشد آنگاه جواب عمومی به دست آمده برابر است با:

الف) $2x^3y+x^2y^2=c$ ب) $2x^3y+x^2y^3=c$

ج) $x^3y+x^2y^3=c$ د) $x^3u+x^2y^2=c$

۲۵- عامل انتگرال ساز معادله $(3y+4xy^2)dx+(2x+3x^2y)dy=0$ به شکل $x^\alpha y^\beta$ عبارت است از:

الف) $\mu=x^2y$ ب) $\mu=xy$ ج) $\mu=xy^2$ د) $\mu=x^2y^2$

۲۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'\sin x+y\cos x=1$ کدام است؟

الف) $y\sin x=x^3+c$ ب) $y\cos x=x^3+c$

ج) $y\cos x=x+c$ د) $y\sin x=x+c$

۲۷- جواب مساله $(1-x^2)y'+xy=x$ مقدار اولیه $y(0)=2$ کدام است؟

الف) $y=x+\sqrt{4-x^2}$ ب) $y=1+\sqrt{1-x^2}$

ج) $y=2-\sqrt{1-x^2}$ د) $y=x^2+\sqrt{4-x^2}$

۲۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'+y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$ کدام است؟

الف) $y=ce^x+\mathrm{Arc}\tan e^x$ ب) $e^xy=c+\mathrm{Arc}\tan e^x$

ج) $e^xy=cx^2+\mathrm{Arc}\sin e$ د) $y=cx+\mathrm{Arc}\sin e^x$

۲۹- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(xy^2-y)dx+(x^2y-x)dy=0$

الف) $x^2y^2-2xy=c$ ب) $x^2y^2+xy=c$

ج) $x^2y^2+2xy=c$ د) $x^2y^2-xy=c$

۳۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'(y'+y)=x(x+y)$ کدام است؟

الف) $(y-\dfrac{x^2}{2}-ce^x)(y+x-1-ce^{-x})=0$ ب) $(y-x+1-ce^x)(y-\dfrac{x^2}{2}-c)=0$

ج) $(y+x-1-ce^{-x})(y-\dfrac{x^2}{2}-)=0$ د) $(y+x+1+ce^x)(y-\dfrac{x^2}{2}-ce^{-x})=0$

۳۱- جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل [illegible] کدام است:

الف) $y=(ce^{\frac{x^2}{2}}-2)^2$ ب) $y=(ce^{\frac{x^2}{2}}-2)^{-2}$

ج) $y=(ce^{\frac{x^2}{2}}-2)^{\frac{1}{2}}$ د) $y=(ce^{\frac{x^2}{2}}-2)^{-\frac{1}{2}}$

۳۲- جواب خصوصی معادله $y(6y^2-x-1)dx+2xdy=0$ **با شرط** $y(0)=1$ **در** $x=Ln^2$ **کدام است:**

الف) $y^2=Ln2$ ب) $y^2=\frac{1}{2}Ln2$

ج) $y^2=Ln4$ د) $y^2=\frac{1}{3}Ln2$

۳۳- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل $x^2y'=x^2y^2-xy-1$ **به صورت** $y=\frac{1}{x}$ **باشد جواب عمومی معادله به کدام صورت است؟**

الف) $xy=1+\frac{2x}{c-x^2}$ ب) $xy=1+\frac{2x^2}{c-x^2}$

ج) $xy=1+\frac{x^2}{c-x^2}$ د) $xy=1+\frac{x}{c-x^2}$

۳۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=-2+3y-y^2$ **کدام است؟**

الف) $y=\frac{2ce^x-1}{ce^x-1}$ ب) $y=\frac{2ce^x+1}{ce^x-1}$

ج) $y=\frac{2ce^x+3}{ce^x+1}$ د) $y=\frac{2ce^x-2}{ce^x+1}$

۳۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=e^{-x}y^2+y-e^x$ **با فرض این که** $y_1=ehx$ **جوابی از معادله است برابر است با:**

الف) $y=\frac{ce^x+e^{2x}}{c-e^{2x}}$ ب) $y=\frac{c-e^{3x}}{ce^x+e^{2x}}$

ج) $y=\frac{ce^x+e^{3x}}{c-e^{2x}}$ د) $y=\frac{c+e^{3x}}{ce^x+e^{2x}}$

۳۶- جواب‌های معادله دیفرانسیل $(x^3+y+1)y'=3x^2$ **کدام است؟**

الف) $x^2=ce^y+y-2$ ب) $x^3=ce^y-y-2$

ج) $x^3=ce^{-y}-y+2$ د) $x^2=ce^{-y}+y+2$

$$2(y+1)y'-\frac{2}{x}(y+1)^2=x^4$$

الف) $3(y+1)^2=x^5+cx^2$

ب) $(y+1)^2=x^5+cx^2$

ج) $(y+1)^2=x^3+cx$

د) $3(y+1)^2=x^3+cx$

۳۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^2dx=(x^3-xu)dy$ **کدام است؟**

الف) $3g=2x^2+cx^2y^3$

ب) $y=2x^3+cxy^2$

ج) $y=x^2+cxy^2$

د) $2y=3x^2+cx^2y^3$

۳۹- معادله دیفرانسیل کلروای که جواب غیر عادی آن $y=x-x^3$ **باشد کدام است؟**

الف) $y=xy'+(1-y')^{\frac{3}{2}}$

ب) $y=xy'+\frac{(1-y')^{\frac{3}{2}}}{3}$

ج) $y=xy'+2\frac{(1-y')^{\frac{3}{2}}}{3}$

د) $y=xy'+2(1-y')^{\frac{3}{2}}$

۴۰- جواب غیر عادی معادله‌ی دیفرانسیل $y+xy'=x^4y'^2$ **کدام است؟**

الف) $4x^2y-1=0$

ب) $4xy^2+1=0$

ج) $4x^2y+1=0$

د) $4xy^2-1=0$

۴۱- پوش منحنی تک پارامتری $y^2=2px+p^2$ **کدام است؟**

الف) $y=mx$

ب) $x^2-y^2=1$

ج) $y^2=4x$

د) پوشش ندارد.

۴۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2+1)^2y'+2n(x^2+1)y=y^{-2}$ **کدام است؟**

الف) $y=\sqrt{x^2+1}=c\sqrt{x^2+1}+x^2+3$

ب) $y^3(x^2+1)^3=x^3+3x+c$

ج) $y=c(x^2+1)+x^3+2x$

د) $y^2=c(x^2+1)^2+x^2+3x$

۴۳- جواب مساله‌ی مقدار اولیه $xy'' = y'(1+\mathrm{Ln}\frac{y'}{x})$ با شرط اولیه $y(1)=\frac{1}{2}$ و $y'(1)=1$ کدام است؟

الف) $y=\frac{x^2}{2}$

ب) $y=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(2e-xe)$

ج) $y=\frac{1}{2}e^{x-1}$

د) $y=x-\frac{1}{2}$

۴۴- معادله دیفرانسیل دسته سهمی‌های $y^2=4c(x+1)$ کدام است؟

الف) $y^2=xyy'+2y^2y'^2$

ب) $y^2=xy'+2yy'^2$

ج) $y^2=2xy'+yy'^2$

د) $y^2=2xyy'+y^2y'^2$

۴۵- مسیرهای قائم خانواده‌ی منحنی‌های $y=ce^x$ کدام است؟

الف) $x+y^2=c$

ب) $2x+y^2=c$

ج) $2y+x^2=c$

د) $y+x^2=c$

۴۶- جواب عمومی معادله $x^2y'-3xy-2y^2=0$ کدام است؟

الف) $y=cx^2(x+y)$

ب) $y=cx^2(x+1)$

ج) $y=cx(x^2+y)$

د) $y=cx(y+1)$

۴۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2xy-\sec^2 x)dx+(x^2+2y)dy=0$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}x^2y+\tan x+y^2=c$

ب) $x^2y+2\tan x+\frac{1}{3}y^2=c$

ج) $x^2y-\tan xy^2=c$

د) $x^2y+\frac{1}{2}\tan x+y^2=c$

۴۸- یک عامل انتگرال ساز برای معادله $(3x^2-y^2)dy=2xydx$ کدام است؟

الف) x^4 ب) y^4 ج) y^{-4} د) x^{-4}

۴۹- عامل انتگرال ساز معادله $xdy+ydx+3x^3y^4dy=0$ به شکل $x^\alpha y^\beta$ کدام است؟

الف) $x^{-3}y^{-\frac{3}{4}}$ ب) $x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ ج) xy^{-3} د) $x^{-2}y^{-2}$

۵۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+x)dy=(y-x)dx$ در مختصات قطبی چگونه نمایش داده می‌شود؟

الف) $\theta=ce^r$ ب) $r=ce^\theta$ ج) $r=c\theta$ د) $\theta=r+c$

الف) $x = ye^{y} + 2y$

ب) $x^2y = e^{y} + cy$

ج) $xy = e^{y} + cy^2$

د) $x^2 = ye^{y} + cy^2$

۵۲- اگر $y_1 = x$ **یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل** $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$ **باشد جواب عمومی آن کدام است؟**

الف) $c(y+x)e^{\frac{3}{5}x^5} = y-x$

ب) $c(y-x)e^{\frac{3}{5}x^5} = y+x$

ج) $c(y-x)e^{\frac{2}{5}x^5} = y+x$

د) $c(y+x)e^{\frac{2}{5}x^5} = y-x$

۱- گزینه (۴) صحیح است.

با جایگذاری در معادله داریم:

$$x^2 m(m-1)x^{m-2}+4xmx^{m-1}+2x^m=0$$

$$m(m-1)+m+2=0$$

$$m^2+3m+2=0\rightarrow(m+2)(m+1)=0\rightarrow\begin{cases}m=-2\\m=-1\end{cases}$$

۲- گزینه (۱) صحیح است.

$$y'=f(x,y)=\frac{x-y}{2x+5y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-vx}{(2x+5y)^2}\Rightarrow 2x+5y\neq 0$$

برای اینکه که توابع $f,\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته باشند باید مخرج‌هایشان مخالف صفر باشد.

۳- گزینه (۳) صحیح است.

معادلهٔ همگن است با فرض $y=xu$ داریم $y'=u+xu'$ و معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1-u}{u^2-4}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow(\frac{1}{u^2-4}-\frac{1}{2}\times\frac{2u}{u^2-4})du=\frac{dx}{x}$$

و با انتگرال‌گیری داریم:

$$\frac{1}{4}Ln(\frac{u-2}{u+2})-\frac{1}{2}Ln(u^2-4)=Lnx+Ln/2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(u+2)^3(u-2)}=x^4k^4$$

و با جایگذاری $u=\frac{y}{x}$ و $k^{-4}=c$ داریم:

$$(y+2x)^3(y-2x)c\Rightarrow(y+2x)^2(y-4x^2)=c$$

۴- گزینه (۲) صحیح است.

چون طرف دوم معادله فقط در گزینه (2) مستقل از x است بنابراین عناصر میدان امتدادی در همه‌ی نقاط هر خط موازی محور x، خود متوازی‌اند (بولیس).

۵- گزینه (۲) صحیح است.

معادله همگن است با فرض $y'=u+xu', y=xu$ داریم:

$$\frac{2u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow 1+u^2 = cx \Rightarrow 1+\frac{y^2}{x^2} = cx$$

و با ضرب x^2 در طرف دوم داریم:

$$x^2 + y^2 = cx^3$$

۶- گزینه (۴) صحیح است.

دو طرف معادله را بر siny sinx تقسیم می‌کنیم و یک معادله‌ی جدایی پذیر به دست می‌آید:

$$2\cot x dx + \cot y dy = 0$$

و با انتگرال‌گیری داریم:

$$2\text{Ln}(\sin x) + \text{Ln}(\sin y) = \text{Ln}c_1$$

$$\text{Ln}(\sin^2 x \sin y) = \text{Ln}c$$

$$\sin^2 x \sin y = c$$

۷- گزینه «۱» صحیح است.

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم؛

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}$$

معادله همگن است و با فرض $y = xu^{(\frac{y}{x}=u)}$ داریم:

$$u + xu' = u + \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}$$

که به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$

و با انتگرال‌گیری داریم:

$$2\sin^{-1} u = c + \text{Ln}x$$

$$\Rightarrow 2\sin^{-1}(\frac{y}{x}) = c + \text{Ln}x$$

۸- گزینه (۳) صحیح است.

از معادله داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y-2x}{2y-x}$$

و به جای $y \Leftarrow \frac{}{y'}$ قرار می‌دهیم و داریم:　　　　معادله حاصل همگن است

$$y' = \frac{x-2y}{y-2x} \xrightarrow[\frac{y}{x}=u]{} \frac{u-2}{1-u^2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \mathrm{Ln}x + \mathrm{Ln}c_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1-x^2) + \mathrm{Ln}(\frac{u-1}{u+1})$$

$$\text{یا} \Rightarrow \frac{u-1}{(u+1)^3} = c_1{}^2 x^2 \xrightarrow{y/x=u} y-x = c(y+x)^3$$

۹- گزینه (۳) صحیح است.

در معادله با جایگذاری $y = x + \frac{1}{u}$ دو معادله داریم:

$$1-\frac{1}{u^2}, u' + 2x(x+\frac{1}{u}) = 1 + x^2 + (x+\frac{1}{u})^2$$

$$\Rightarrow u' = -1 \Rightarrow x = -x + c$$

۱۰- گزینه (۱) صحیح است.

از معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم؛

$$x + yy' = \mathbf{0} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = m_1$$

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow m_2 - m_1 = 1 + m_1 m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

که یک معادله همگن است با فرض $\frac{y}{x} = u$ داریم:

$$\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+y^2} + \tan^{-1}\frac{y}{x} = c$$

و با فرض $c = \mathrm{Lnk}$ در مختصات قطبی داریم:

$$\mathrm{Lnr} + \theta = \mathrm{Lnk} \Rightarrow r = ke^{-\theta}$$

۱۱- گزینه (۲) صحیح است.

معادله همگن است و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy} = -\frac{1}{2}(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) \xrightarrow[\frac{y}{x}=u]{}$$

$$xu' + u = -\frac{1}{2}(\frac{1}{u} + u) \xrightarrow{\text{معادله جدایی پذیر است}} \frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+3u^2}du = \mathbf{0}$$

انتگرال‌گیری

$$\xrightarrow{\qquad\qquad} \text{Lnx} + \frac{1}{3}\text{Ln}(1+3x^2) = c_1$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\left[x^3(1+3u^2)\right] = \text{Knc} \xrightarrow{y/x=u} x^3 + 3xy^2 = c$$

$$\xrightarrow[c=4]{y(1)=-1} x^3 + 3xy^2 = 4 \Rightarrow g(x) = -\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}\Bigg|_{x=\sqrt[3]{4}} = 0$$

۱۲- گزینه (۳) صحیح است.

از معادله $x^n + y^n = c_1$ نسبت به x مشتق می‌گیریم و داریم:

$$x^{n-1} + y'y^{n-1} = 0$$

اگر به جای $y' \Leftarrow \frac{-1}{y'}$ قرار دهیم آنگاه به معادله $y^{n-1} = y'x^{n-1}$ می‌رسیم که جواب عمومی آن به شکل زیر است:

$$y^{2-n} = c_2 + x^{2-n}$$

اگر $n = 3$ فرض شود داریم:

$$y - 1 = c_2 + x^{-1} \Rightarrow \frac{1}{y} = c_2 + \frac{1}{x} = \frac{1+c_2x}{x}$$

که همان خانواده $y = \frac{x}{1+c_2x}$ است.

۱۳- گزینه (۴) صحیح است.

معادله همگن است و با فرض $y = xu$ داریم:

$$2x^3(u + xu') = xu(x^2u^2 + 2x^2)$$

$$\Rightarrow 2u + 2xu' = u^3 + 2u \Rightarrow 2x\frac{du}{dx} = u^3$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{u^2} = \text{Lnx} + c \xrightarrow{y=u} -\frac{x^2}{y} = c + \text{Lnx}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2(c + \text{Lnx}) = 0$$

۱۴- گزینه (۴) صحیح است.

$$y' = x(y + y^2) \Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = xdx$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{y}{y+1} = ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{ce^{2}}{1-ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

چون در $x = 0$ مقدار $y = 1$ است. لذا $C = \frac{1}{2}$ است:

$$g(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{2-e^{\frac{x^2}{2}}} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} g(\sqrt{2}) = \frac{e}{2-e}$$

۱۵- گزینه (۲) صحیح است.

معادله را به شکل جدایی پذیر زیر می‌نویسیم:

$$ye^{y}dy = e^{-x}dx$$
$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} (y-1)e^{y} = c - e^{-x}$$

۱۶- گزینه (۳) صحیح است.

$$A = e\times p(-\int \tanh\times dx) = \exp(-\mathrm{Ln}\cosh x)$$

$$= \frac{1}{\cosh x} = \sec hx$$

$$B = \frac{1}{A} = \cosh x \Rightarrow y = A(\int BRdx + c)$$

$$= \sec h\times(\int \cosh x lech^{3}\times dx + c) = \sec hx(\tanh x + c)$$

$$\Rightarrow g = c\sec hx + \sec hx\tanh x$$

۱۷- گزینه (۲) صحیح است.

چون $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y = \frac{\partial \mu}{\partial y}$ بنابراین معادله دیفرانسیل کامل است اگر u جواب عمومی معادله باشد آنگاه:

$$u_x = m$$

$$u = \int mdx + h(y) = xy^2 + h(y)$$

از طرف دیگر $u_y = 2xy + h'(y) = N$ که از آن $h'(y) = -\sin y$ به دست می‌آید یعنی $h(y) = \cos y \Leftarrow$ در نتیجه جواب عمومی معادله به شکل زیر به دست می‌آید:

$$u(n,y) - = xy^2 + (0)y = c$$

۱۸- گزینه (۱) صحیح است.

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$$

$$u(x,y)+2xy=c$$

۱۹- گزینه (۲) صحیح است.

معادله داده شده کامل است. بنابراین جواب عمومی آن به شکل زیر است:

$$u(x,y)=yLnx+3x^2-2y+c$$

چون $u(1,1)=0$ است بنابراین $c=-1$ می‌باشد در نتیجه؛

$$u(x,y)=yLnx+3x^2-2y-1$$

$$u(e,1)=1+3e^2-2-1=3e^2-2$$

۲۰- گزینه (۱) صحیح است.

بایستی $\frac{\partial n}{\partial x}=\frac{\partial m}{\partial y}$ باشد بنابراین:

$$e^{2xu}+2xye^{2xy}=be^{2xy}+b2xye^{2xy}$$

این معادله فقط به ازای $b=1$ برقرار است.

۲۱- گزینه (۳) صحیح است.

$$\frac{\partial m}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2\ \frac{\partial n}{\partial x}=2x$$

$$g(x)=\frac{\frac{\partial m}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=3$$

$$\mu(x)=e^{\int g(x)dx}=e^{3x}$$

۲۲- گزینه (۳) صحیح است.

معادله را به صورت $dx+(\frac{x}{y}-\sin y)dy=0$ نوشته و عامل انتگرال سازی برای آن می‌یابیم؛

$$h(y)=\frac{\frac{\partial m}{\partial y}-\frac{\partial n}{dx}}{-m}=\frac{-\frac{1}{y}}{-1}=\frac{1}{y}$$

$$\mu(y)=e^{sh(y)dy}=e^{Lny}=y$$

عامل انتگرال ساز دو معادله ضرب می‌کنیم:

$$ydx+(x-y\sin y)dy=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\Rightarrow u=xy+h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + h'(y) = x - y\sin y$$

$$\Rightarrow h'(y) = -y\sin y \Rightarrow h(y) = -(-y(0)y + \sin y)$$

$$= y(0)y - \sin y$$

جواب عمومی $\Rightarrow u = xy + y(0)y - \sin y = c$

۲۳- گزینه (۲) صحیح است.

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم؛

$$(3x + \frac{6}{g})dx + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})dy = 0$$

دو طرف را در $x^m y^n$ ضرب می‌کنیم؛

$$(3x^{m+1}y^n + 6x^m y^{n-1})dx + (x^{m+2}y^{n-1} + 3x^{m-1}y^{m+1})dy = 0$$

شرط کامل بودن را می‌نویسیم؛

$$3nx^{m+1}y^{n-1} + 6(n-1)x^m y^{n-2} = (m+2)x^{m+1}y^{n-1} + 3(m-1)x^{m-2}y^{n+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-1=0 \to n=1 \\ m-1=0 \to m=1 \end{cases} \qquad m+n=1+1=2$$

و عامل انتگرال ساز $\mu - xy$ است.

۲۴- گزینه (۱) صحیح است.

با ضرب عامل انتگرال ساز در معادله داریم؛

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m_\mu = \frac{3xy + y^2}{xy(2x+y)} = \frac{3x+y}{x(2x+y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N_\mu = \frac{x^2 + xy}{xy(2x+u)} = \frac{x+y}{y(2x+y)}$$

$$u = \int m\mu dx + h(y) = \int \left[\frac{2x+y}{x(2x+y)} + \frac{x}{x(2x+y)}\right]dx + h(y)$$

$$= \text{Ln}x + \frac{1}{2}\text{Ln}(2x+y) + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(2x+y)} + h'(y) = \frac{2(x+y)}{2y(2x+y)} \Rightarrow \frac{1}{2(2x+y)} + \frac{1}{2y}$$

در نتیجه

$$h(y) = \frac{1}{2}\text{Ln}y \qquad \Leftarrow h'(y) = \frac{1}{2y}$$

$$u = \frac{}{2}Ln(2x+y) + Lnx + \frac{}{2}Lny = C_1$$

$$L_n(2x+y)x^2y = 2c_1$$

$$2x^3y + x^2y^2 = e^{2c_1} = c$$

۲۵- گزینه (۱) صحیح است.

عامل انتگرال ساز را در معادله ضرب می‌کنیم:

$$\left(3x^{\alpha}y^{B+1} + 4x^{\alpha+1}y^{2+\beta}\right)dx + \left(2x^{\alpha+1}y^{\beta} + 3x^{\alpha+2}y^{\beta+1}\right)dy = \mathbf{0}$$

و شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم:

$$3(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} + 4(2+\beta)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = 2(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} = 3(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} 3b+3 = 2\alpha+2 \\ 8+4\beta = 3\alpha+6 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

۲۶- گزینه (۴) صحیح است.

$$y' + y\cot x = \frac{1}{\sin x}$$

$$A = e\times p(-\int \cot x dx) = \exp(-Ln(\sin x)) = \frac{1}{\sin x}$$

$$B = \frac{1}{A} = \sin x \Rightarrow y = A(\int BRdx + c)$$

$$y = \frac{1}{\sin x}(\int dx + c)$$

$$\Rightarrow y\sin x = x + c$$

۲۷- گزینه (۲) صحیح است.

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{x}{1-x^2}$$

$$A = \exp(-\int \frac{x}{1-x^2}dx) = \sqrt{1-x^2}$$

$$B = \frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = A(\int BRdx + c)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}(\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{x}{1-x^2}dx + c)$$

$$= \sqrt{1-x^2}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c) = 1 + c\sqrt{1-x^2}$$

$_{y=2}$

$$\Rightarrow y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$$

۲۸- گزینه (۲) صحیح است.

$$A = \exp(-\int dn) = e^{-x}, B = \frac{1}{A} = e^{x}$$

جواب عمومی $\Rightarrow y = A(\int BRdx + c) = e^{-x}(\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx + c)$

$$= e^{-x}(\text{Arctane}^{x} + c)$$

جواب عمومی معادله

$$\Rightarrow e^{x}y = \text{Arctane}^{x} + c$$

۲۹- گزینه (۱) صحیح است.

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 2xy - 1, \frac{\partial n}{\partial n} = 2xy - 1$$

$$u = \int mdx + h(y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - xy + h(y)$$

$$uy = x^2y - x + h'(y) = x^2y - x$$

بنابراین $h(y) = c'$ پس داریم:

$$u = \frac{1}{2}x^2y^2 - xy = c'$$

۳۰- گزینه (۳) صحیح است.

$$y'^2 + yy - x(x+y) = 0$$

$$y' = -x - y, y' = x \rightarrow$$

حال این دو معادله داریم:

$$\varphi(x,y,c) = y + x - 1 + ce^{-x}$$

$$t(x,y,c) = y - \frac{x^2}{2} - c$$

جواب عمومی $\Rightarrow \varphi(x,y,c) + (x,y,c) = 0$

$$(y + x - 1) + ce^{-x})(y - \frac{x^2}{2} - c) = 0$$

معادله برنولی است و داریم:

$$y^{-\frac{1}{2}}y' - 2xy^{\frac{1}{2}} = 4x$$

با فرض $u = y^{\frac{1}{2}}, u' = \frac{1}{2}y'y^{-\frac{1}{2}}$ داریم:

$$2u' - 2xu = 4x$$

$$\Rightarrow u = ce^{\frac{x^2}{2}} - 2 \Rightarrow y = u^2 = (ce^{\frac{x^2}{2}} - 2)^2$$

۳۲- گزینه (۴) صحیح است.

$$y' - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x})y = -\frac{3}{x}y^3$$

معادله برنولی است.

و با فرض $u = y^{-2}$ معادله خطی زیر را داریم:

$$u' + (1 + \frac{1}{k})u = \frac{6}{x}$$

جواب عمومی $u = \frac{1}{x}(6 + ce^{-x}) \Rightarrow 1\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x}(6 + ce^{-x})$

$$\Rightarrow y^2(6 + ce^{-x}) = x$$

با جایگذاری $c = -6$ و $x = Ln2$ داریم:

$$y^2(6 - 6 \times \frac{1}{2}) = Ln^2$$

$$y^2 = \frac{1}{3}Ln^2$$

۳۳- گزینه (۲) صحیح است.

$$y' + \frac{1}{x}y - y^2 = -\frac{1}{x}$$

که به صورت معادله ریکارتی زیر است:

$$y' + p(x)y + Q(x)y^2 = R(x)$$

اگر معادله دارای جواب $y_1 = a$ آنگاه جواب کلی آن به صورت $y = u + \frac{1}{v}$ است که v از معادله زیر به دست می‌آید:

که یک معادله خطی است:

$$V'-(2\frac{1}{x}(-1)+\frac{1}{x})v=-1$$

$$V'+\frac{1}{x}v=-1 \Rightarrow v=\frac{c-x^2}{2x} \Rightarrow y=u+\frac{1}{v}=\frac{1}{x}+\frac{2x}{c-x^2}$$

با ضرب دو طرف در x داریم:

$$xy=1+\frac{2x^2}{c-x^2}$$

۳۴- گزینه (۱) صحیح است.

می دانیم $y_1 = k$ در معادله صدق می‌کند و با قرار دادن این جواب $k=1$ و $k=2$ به دست می‌آید با $y_1 = k = 2$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y'-3y+y^2=-2$$

اگر جواب $y=u+\frac{1}{v}$ مورد نظر باشد آنگاه:

$$V'-(2\times 2\times 1-3)V=1 \Rightarrow V'-V=1$$

$$\Rightarrow V=ce^x-1$$

$$y=u+\frac{1}{v}=2+\frac{1}{ce^x-1}=\frac{2ce^x-1}{ce^x-1}$$

۳۵- گزینه (۳) صحیح است.

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم؛

$$y'-y-e^{-x}y^2=-e^x$$

معادله کمکی زیر را تشکیل می‌دهیم؛

$$V'-(2e^x(-e^{-x})-1)v=-e^{-x}$$

$$V'+3V=-e^{-x} \to v=\frac{c-e^{2x}}{2e^{3x}}$$

$$y=u+\frac{1}{v}=e^u+\frac{2e^{3x}}{c-e^{2x}}=\frac{c_e{}^x+e^{3x}}{c-e^{2x}}$$

۳۶- گزینه (۲) صحیح است.

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم؛

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+y+1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(y+1)x^{-2}$$

با حل این معادله به روش معادل

$$x' - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}(y+1)x^{-2}$$

$$x^3 = ce^y - y - 2$$

۳۷- گزینه (۱) صحیح است.

ابتدا فرض کنیم $z = 1 + y$ در این صورت معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$2zz - \frac{2}{x}z^2 = x^4$$

که معادله برنولی با $u = z^2$ است و داریم:

$$u' - \frac{2}{x}u = x^4$$

$$u = \frac{1}{3}x^5 + c'x^2 \Rightarrow 3(y+1)^2 = x^5 + cx^2$$

۳۸- گزینه (۱) صحیح است.

معادله را به شکل برنولی در می‌آوریم؛

$$y^2x' = x^3 - xy \rightarrow x' + \frac{1}{y}x = \frac{x^3}{y^2}$$

$$\Rightarrow x^{-3}x' + \frac{1}{y}x^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

با فرض $u = x^{-2}$ داریم؛

$$u' - \frac{2}{g}u = -\frac{2}{y^2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{2 + cy^3}{3y} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{2 + cy^3}{3y}$$

$$\Rightarrow 3y = 2x^2 + cx^2y^3$$

۳۹- گزینه (۳) صحیح است.

شکل کلی معادله کلرو به صورت $y = xy' + f(y')$ و جواب عمومی آن خطوط مستقیم $y = cx + f(c)$ است خط مماس در یک نقطه (n_0, y_0) بر منحنی جواب غیر عادی $y = x - x^3$ عبارت است از:

$$y=(1-3x_0 2)x+2x_0^{\ 3}$$

خط فوق یکی از خطوط (+) است و با مقایسه‌ی این در نتیجه می‌گیریم که؛

$$c=1-3x_0^{\ 2}, f(c)=2x_0^{\ 3}$$

$$\Rightarrow f(c)=2(\frac{1-c}{2})^{\frac{3}{2}}$$

معادله کلرو $\Rightarrow y=xy'+2(\frac{1-y'}{3})^{\frac{3}{2}}$

۴۰- گزینه (۳) صحیح است.

با فرض $y'=\frac{dy}{dx}=p$ معادله به شکل $y=-xp+x^4p^2$ در می‌آید از هر طرف دیفرانسیل می‌گیریم

$$y'dx=-pdx-xdp+4x^3p^2dx+2x^4pdp$$

$$\Rightarrow (2px^3-1)(2pdx+xdp)=0$$

جواب غیر عادی $2px^3-1=0 \rightarrow p=\frac{1}{2x^3}$

$$y=-\frac{1}{4x^2} \Rightarrow 4x^2y+1=0$$

۴۱- گزینه (۴) صحیح است.

$$\begin{cases} F(x_1y_1p)=y^2-2px-p^2=0 \\ Fp(x,y,p)=0-2x-2p=0 \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم داریم $p=-x$ و در معادله اول قرار می‌دهیم؛

$$y^2-2(-x)x-(-x)^2=0$$

$$y^2-x^2=0$$

که از آن $y=mx$ به دست می‌آید برای بررسی که این دو جواب معادلات پوشش هستند یا مکان نقاط استثنایی هستند دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$F(x,y,p)=y^2-2px-p^2=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-2p=0 \rightarrow p=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y=0 \rightarrow y=0$$

پس معادله پوشش ندارد.

۴۲- گزینه (۲) صحیح است.

$$y' \mp \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}y^{-2}$$

$$y^2y' + \frac{2x}{x^2+1}y^3 = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

با فرض $x = y^3$ (برنولی)

$$u' = 3y'y^2$$

$$u' + \frac{6x}{x^2+1}u = \frac{3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^3+3x+c}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$\xrightarrow{u=y^3} y^3\left(x^2+1\right)^3 = x^3+3x+c$$

۴۳- گزینه (۱) صحیح است.

فرض کنید $y' = ux$ باشد در این صورت $y' = u'x + y$ و در معادله قرار می‌دهیم.

$$u'x + u = u\left(1 + Lnu\right)$$

$$u'x = uLnu \rightarrow \frac{du}{uLnu} = \frac{dx}{x} \Rightarrow Lnu = c_1x$$

$$Ln\frac{y'}{x} = c_1x \xrightarrow[y'=1]{x=1} Ln1 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$$

که از آن داریم:

$$Ln\frac{y'}{x} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow y' = x$$

یا $y = \dfrac{x^2}{2} + c_2$

که نتیجه می‌شود در $x = 1$ و $y = \dfrac{1}{2}$ و داریم $c_2 = 0$ پس $y = \dfrac{x^2}{2}$

۴۴- گزینه (۴) صحیح است.

$$y^2 = 4c(x+c)$$

$$2yy' = 4c \to c = \frac{yy'}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4\frac{yy'}{2}\left(x + \frac{yy'}{2}\right) = 2xyy' + y^2y'^2$$

۴۵- گزینه (۲) صحیح است.

$$y = ce^x kac = \frac{y}{e^x}$$

$$y' = ce^x \Rightarrow y' = \frac{y}{e^x}e^x$$

که معادله $y' = y$ به دست می‌آید اگر y' را با $-\frac{1}{y}$ عوض کنیم داریم:

$$y' = -\frac{1}{y} \Rightarrow ydy = -dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -x + c$$

$$\Rightarrow 2x + y^2 = c$$

۴۶- گزینه (۱) صحیح است.

معادله همگن است و از تغییر متغیر $\frac{y}{x} = u$ استفاده می‌کنیم:

$$x^2(u + xu') - 3x^2u - 2x^2u^2 = 0$$

$$\Rightarrow u + xu' - 3u - 2u^2 = 0$$

$$x\frac{du}{dx} = 2u^2 + 2u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dx}{u(u+1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u}{u+1} = cx^2$$

$$u = \frac{y}{x} \to y = cx^2(x + y)$$

۴۷- گزینه (۳) صحیح است.

$$u = \int mdx + Q(y)$$

$$= \int (2xy - \sec^2 x)dx + \varphi(y) = x^2 y - \tan x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

$$u(x,y) = x^2 y - \tan x + y^2 = c$$

۴۸- گزینه (۳) صحیح است.

$$h(y) = \frac{my - nx}{-m} = \frac{2x - (-6x)}{-2xy} = -\frac{4}{y}$$

$$\mu = \exp(\int h(y)dy) = \exp(-4Lny) = y^{-4}$$

۴۹- گزینه (۲) صحیح است.

$$\underbrace{y}_{m}dx + (\underbrace{x + 3x^3y^4}_{n})dy = 0$$

$$g(z)_{x/y} = \frac{my - nx}{my - mx} = \frac{1 - (1 + 9x^2y^4)}{12x^3y^3} = \frac{9x^2y^4}{12x^3y^3} = -\frac{3y}{4x}$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int g(z)dz} = e^{-\frac{3}{4}Lnz} = \frac{1}{z^{\frac{3}{4}}} = \frac{y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = y^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{3}{4}} \left(z = \frac{x}{y}\right)$$

۵۰- گزینه (۲) صحیح است.

$$xdx + ydy = ydx - xdy$$

دو طرف را بر $x^2 + y^2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.d\frac{(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = d(\tan^{-1}\frac{y}{x})$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} Ln\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) + C_1$$

$$Lnr = \theta + c_1 \Rightarrow re^{\theta + c_1} \Rightarrow r = ce^{\theta}$$

۵۱- گزینه (۱) صحیح است.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = ye^y \Rightarrow a = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y, B = \frac{1}{A} = \frac{1}{y}$$

$$k = A(\int BRdy + c) = y(\int e^y dy + c) = ye^y + cy$$

معادله ریکارتی $y' = p + qy + 2y^2$ با جواب خصوصی y به صورت زیر حل می‌شود ابتدا معادله برنولی $z' - (q + 2ry_1)z = rz^2$ را حل می‌کنیم و جواب عمومی به شکل $y = y_1 + z$ است:

$$z' - \left(\frac{1}{x} + 2x3x\right)z = x^3 z^2$$

$$z' z^{-2} - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)z^{-1} = x^3 \rightarrow (u = z^{-1})$$

$$u' + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)u = -x^3$$

که جواب عمومی آن $u = \dfrac{-1 + 2c/e^{-\frac{2}{5}x^5}}{2x}$ بنابراین $y = x + z$

$$\Rightarrow y = x + \frac{2x}{c2e^{-\frac{2}{5}x^5} - 1} \Rightarrow (y - x)c_2 e^{-\frac{2}{5}x^5} - y + x = 2x$$

$$\Rightarrow c(x + y)e^{\frac{2}{5}x^5} = y - x$$

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

فرم کلی این معادلات به صورت زیر است :

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

که در ان ضریب $a_2(x)$ مخالف صفر است با تقسیم طرفین معادله بر $a_2(x)$ می‌توان نوشت.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

نکته: مقادیری از x که به ازای ان $a_2(x)\neq 0$ می شود نقطه تکین معادله نامیده میشود.

اگر $r(x)=0$ باشد معادله همگن و جواب ان را جواب عمومی معادله نامیده وبا y_g نمایش می دهیم و در غیر این صورت اگر $r(x)\neq 0$ باشد معادله غیر همگن وجواب معادله را جواب خصوصی نامیده وبا y_p نمایش می دهیم جواب کلی معادله فوق مجموع این دو جواب می باشد .

$$y=y_g+y_p$$

قضیه ۱ : اگر y_1 یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد انگاه $y=cy_1$ نیز یک جواب معادله خواهد بود .

قضیه ۲ : اگر y_2 , y_1 جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه 2 باشند آنگاه y_1 , y_2 جوابی از معادله دیفرانسیل می باشد .

نکته : در حالت کل هر ترکیب خطی از y_1 و y_2 نیز جوابی برای معادله دیفرانسیل مرتبه 2 خواهد بود.

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

قضیه : اگر y_p جواب خصوصی معادله غیر همگن مرتبه دوم و y_g جواب عمومی معادله همگن مرتبه دوم باشد انگاه $y=y_g+y_p$ جواب معادله غیر همگن خواهد بود.

مثال ۱ : $l(x)$ و $q(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که $y_1=x^{1/3}$ و $y_2=x^{-1/3}$ دو جواب مستقل برای معادله دیفرانسیل $y''+l(x)y'+q(x)y=0$ باشد.

1) $l(x)=-x^{-1}$ و $q(x)=2/9x^{-2}$

2) $l(x)=x^{-1}$ و $q(x)=-1/9x^{-1}$

3) $l(x)=3x^{-1}$ و $q(x)=4/9x^{-2}$

4) $l(x)=x$ و $q(x)=-1/9x^{-2}$

$$y_1 = x^{1/3} \Rightarrow y_1' = 1/3x^{-2/3} \Rightarrow y_1'' = -2/9x^{-5/3}$$
$$y_2 = x^{-1/3} \Rightarrow y_2' = -1/3x^{-4/3} \Rightarrow y_2'' = 4/9x^{-7/3}$$
$$\begin{cases} -2/9x^{-5/3} + 1/3x^{-2/3}l(x) + x^{1/3}q(x) = 0 \\ 4/9x^{-7/3} - 1/3x^{-4/3}l(x) + x^{-1/3}q(x) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} l(x) = x^{-1} \\ q(x) = -1/9x^{-2} \end{cases}$$

قضیه : (اصل بر هم نهی جوابها) : اگر $y_1 p(x)$ و $y_2 p(x)$ جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل باشند میتوان نوشت: .

$$y_1 p(x) \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x)$$
$$y_2 p(x) \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = r_2(x)$$

از(I) و(II) نتیجه زیر حاصل میشود :

$$y = y_1 p(x) + y_2 p(x) \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x) + r_2(x)$$

استقلال خطی جوابها

فرض کنید n تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ و $\ldots y_n(x)$ بر بازه I تعریف شده باشند این n تابع را بر این بازه مستقل خطی می گوییم . اگر هیچ کدام از آنها را نتوان به صورت ترکیب تابعی از سایر توابع نوشت.

همچنین شرط لازم و کافی برای مستقل بودن n جواب در این فاصله ان است که $w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (رونیسکین) مخالف صفر باشد .

$$. w(y_1, y_2, \ldots y_3) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \ldots & y_n \\ y_1' y_2' \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

نکته : شرط استقلال خطی دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مربوط به معادله خطی مرتبه دوم همگن در یک فاصله ان است که رونیسکین انها در این فاصله مخالف صفر باشد .

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

مثال ۲ : آیا توابع $1, x, x^2, x^3, x^4$ بر مجموعه اعداد حقیقی مستقل خطی هستند ؟

حل :

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 = 0$$

اگر حداقل یکی از پارامتر های c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 مخالف صفر باشند در این صورت معادله فوق یک معادله از درجه حداکثر 4 خواهد بود که در مجموعه اعداد حقیقی حد اکثر 3 ریشه خواهد داشت یعنی تساوی فوق به ازای هر x نمی تواند بر قرار باشد مگر اینکه $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ بنابر این این پنج تابع مستقل خطی هستند .

حل:

$$w\left(e^{x}, e^{3x}, e^{4x}\right) = \begin{vmatrix} e^{x} e^{3x} e^{4x} \\ e^{x} 3e^{3x} 4e^{4x} \\ e^{x} 9e^{3x} 16e^{4x} \end{vmatrix} = 6e^{8x} \neq 0$$

بنابر این توابع مذکور مستقل خطی می باشد.

نکته : دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ برابزه I مستقل خطی هستند.

اگر نسبت آنها یک عدد ثابت نباشد یعنی ثابت $\neq \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$

اگر ثابت $= \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ آنگاه دو تابع وابسته خطی میباشد

نکته : با توجه به نکته قبل دو تابع $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$ مستقل خطی هستند .

بنابراین دو تابع $\sin bx, \cos bx$ نیز مستقل خطی هستند.

معادلات همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت عبارتست از :

$$y'' + ay' + by = 0$$

برای معادله فوق جوابی به صورت $y = e^{lx}$ (λ یک ثابت است) را در نظر می گیریم . با جایگذاری در معادله فوق بـه معادلـه مشخصه (مفسر) می رسیم .

$$l^2 + al + b = 0$$

چون معادله مشخصه درجه دوم با ضرایب حقیقی می باشد پس سه حالت ایجاد می شود :.

حالت اول : ($\Delta > 0$) معادله مشخصه دارای هر ریشه حقیقی متمایز $\lambda 1$ و $\lambda 2$ است و جواب عمومی عبارتست از

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2{}^{e\lambda_2 x}$$

حالت دوم : ($\Delta = 0$) معادله مشخصه دارای ریشه تکراری (مضاعف) $l_1 = l_2 = l$ است وجواب عمومی عبارتست از :

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{lx}$$

حالت سوم : ($\Delta < 0$) معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط متمایز $a - bi, a + bi$ است و جواب عمومی عبارتست از :

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

حل :

$$l^2-4l+3=0 \Rightarrow l_1=1, l_2=3$$
$$y=c_1e^x+c_2e^{3x}$$

معادلات خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y^1+a_0y=0$$

با تعریف پارامتر D به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx}=D_1, \frac{d^2y}{d^2x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=D^2y$$

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a_1D+a_0)y=0$$

اگر حاصل فوق را به حاصل ضرب عامل های زیر تجزیه کنیم خواهیم داشت

$$F(D)y=a_n(D-l_n)(D-l_{n-1})\mathbf{K}(D-l_1)y=0$$

الف) اگر $l_1 \neq l_2 \neq \mathbf{K} \neq l_n$ باشد.

$$y_g(x)=c_1e^{l_1x}+c_2e^{l_2x}+\mathbf{K}+c_ne^{l_nx}$$

ب) اگر $l_1 \neq l_2 \neq l_3 \neq \mathbf{K} \neq l_n$ باشد.

$$y_g(x)=c_1e^{l_1x}+c_2e^{l_2x}+c_3e^{l_3x}\mathbf{K}+c_ne^{l_nx}$$

نکته : اگر l به اندازه r تکرار شود جواب مربوط به l عبارتست از :

$$y_g(x)=c_1e^{lx}+c_2xe^{lx}+c_3x^2e^{lx}\mathbf{K}+c_nx^{r-1}e^{lx}$$

مثال ۵ : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''-2y''-y'+2y=0$ را بدست اورید .

حل :

$$\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)-(\lambda-2)=0$$
$$\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=2,1,-1$$
$$y=c_1e^{2x}+c_2e^x+c_3e^{-x}$$

در مثال 5 ریشه های معادله $\pm r$ میباشند ترکیب خطی $c_2e^x+c_3e^{-x}$ را میتوان به صورت زیر نوشت

$$c_2e^x+c_3e^{-x}=\alpha\sinh x+\beta\cosh x$$

در گزینه ها مجموع جوابها هم میتواند به صورت $\{e^{lx},e^{-lx}\}$ باشند و هم به صورت $\{\sinh lx, \cosh lx\}$ باشند .

مثال ۶ : جواب عمومی معادله دیفرانسیل [illegible] عبارت است از :

$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{2x}$ (1 $\qquad$ $y = c_1e^{x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-x}$ (2

$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{x} + c_3x^2e^{x}$ (3 $\qquad$ $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x}$ (4

حل: گزینه (3)

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 1 = 0$$
$$(l-1)^3 = 0 \Rightarrow l = 1,1,1$$
$$\Rightarrow y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3x^2e^{x}$$

ج)معادله مشخصه دارای ریشه تکراری مختلط باشد $(l_1 = a - bi, l_2 = a + bi)$ تکراری از مرتبه r .

$$y_g = e^{ax}\left[\left(c_1 + c_2x + \mathbf{K} + c_rx^{r-1}\right)\cos bx + \left(d_1 + d_2x + \mathbf{K} + d_rx^{r-1}\right)\sin bx\right]$$

نکته : اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط و بقیه ریشه ها حقیقی باشند می توان نوشت :

$$y_g = e^{ax}\left(c_1\cos bx + c\sin bx\right) + c_3e^{l_1x} + c_4e^{l_2x} + \mathbf{K} + c_ne^{l_nx}$$

مثال ۷ : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + 2y = 0$ کدام یک از گزینه های زیر میباشد ؟

$e^{x}\left(c_1\sin x + c_2\cos x\right)$ (1

$e^{x}\left(c_1\sin 2x + c_2\cos 2x\right)$ (2

$e^{-x}\left(c_1\sin x + c_2\cos x\right)$ (3

$e^{2x}\left(c_1\sin 2x + c_2\cos 2x\right)$ (4

حل:گزینه (1)

$$l^2 - 2l + 2 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$
$$l_{1,2} = 1 \pm i \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$
$$y = e^{x}\left(c_1\sin s + c_2\cos x\right)$$

مثال ۸ : معادله دیفرانسیل $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ را حل کنید.

$$l^4 + 2l^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(l^2 + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow l = \pm i, \pm i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = c_1\sin x + c_2\cos x + c_3x\sin x + c_4x\cos x$$

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+e^{-x}\left(c_3\sin 2x+c_4\cos 2x\right)$ (1

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^{x}\left(c_3\sin 2x+c_4\cos 2x\right)$ (2

$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+e^{-x}\left(c_3\sin 2x+c_4\cos 2x\right)$ (3

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{x}+e^{-2x}\left(c_3\sin 2x+c_4\cos 2x\right)$ (4

حل: گزینه (3)

این معادله به صورت فرم عملگری داده شده است برای یافتن معادله مشخصه : کافیست به جای D , l قرار دهیم .

$$\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$$

$$\mathrm{D}^{\mathrm{k}}=\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{dx}^{\mathrm{k}}}$$

$$(l+2)^2\left(l^2+2l+5\right)=0\Rightarrow\begin{cases}l=-2,-2\\ l=-1\pm 2i\end{cases}$$

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-x}\sin 2x+c_4e^{-x}\cos 2x$$

مثال ۱۰: مقدار a را به طوری بیابید که جواب معادله زیر وقتی $t\to+\infty$ به صفر میل کند .

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-2y=0\\ y(0)=a\,,\,y'(0)=2\end{cases}$$

حل:

$$y''-y'-2y=0\Rightarrow l^2-l-2=0$$

$$l=-1,2$$

جواب عمومی به شکل زیر محا سبه میشود :

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$$

$$\begin{cases}a=y(0)=c_1+c_2\\ 2=y'(0)=-c_1+2c_2\end{cases}$$

برای اینکه خواسته براورده شود باید $c_2=0$

$$a+2=3c_2\Rightarrow a=-2$$

مثال ۱۱: معادله دیفرانسیل مربوط به جواب عمومی $y=Ae^x+Bxe^x$ را بیابید .

حل :

$\left\{e^x,xe^x\right\}$ پایه جواب هستند . از پایه جواب واضح است که حتما ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت است .

1 و1 = ریشه های معادله مشخصه

$$\Rightarrow D^2-2D+1=0 \Rightarrow y''-2y'+y=0$$

مثال ۱۲ : معادله دیفرانسیل حاکم بر پایه جواب $\{e^{-x}\cos x, e^{x}\sin x\}$ کدام یک از گزینه های زیر است ؟

1) $y''+2y'+2y=0$

2) $y''-y'+2y=0$

3) $y''+2y'-2y=0$

4) $y''-2y'-y=0$

حل : گزینه (1)

$$a=-1, b=1 \Rightarrow l=-1\pm i$$
$$l+1=\pm i \Rightarrow (l+1)^2=-1$$
$$l^2+2l+1=-1 \Rightarrow l^2+2l+2=0$$

معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می شود :

$$y''+2y'+2y=0$$

مثال ۱۳ : پارامتر a,b را به طوری بیابید که هر جواب دلخواه از معادله $y''+ay'+by=0$ پس از گذشت زمان طولانی میرا باشد(در $+\infty$ به صفر میل کند)

حل :

$$y=c_1y_1+c_2y_2 \to 0$$
$$y_1, y_2 \to 0$$

نتیجه اینکه :

معادله مشخصه: $l^2+al+b=0$

حالات مختلف: $l=l_1, l_2$

حالت اول

$$r_1\neq r_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{r_1t} \to 0 \Rightarrow r<0 \\ y_2=e^{r_2t} \to 0 \Rightarrow r<0 \end{cases}$$

حالت دوم

$$r_1=r_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{r_1t} \to 0 \Rightarrow r_1<0 \\ te^{r_2t} \to 0 \Rightarrow r_2<0 \end{cases}$$

حالت سوم

$$r=a+bi, b\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{at}sunbt \to 0 \Rightarrow a<0 \\ e^{at}\cos bt \to 0 \Rightarrow a<0 \end{cases}$$

لازم به ذکر است که این شرط برای معادلات مشخصه با هر درجه ای صادق است .

در مثال 13 داریم :

شرط لازم و کافی

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -a < 0 \\ r_1 r_2 > 0 \Rightarrow b > 0 \end{cases} \Rightarrow a, b > 0$$

استفاده از یک جواب معلوم برای تعیین جواب عمومی

اگر فرض کنیم $y_1(x)$ جوابی معلوم ار معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد جواب $y_2(x)$ از معادله دیفرانسیل مذکورومستقل خطی با $y_1(x)$ را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$y_2(x) = V(x)y_1(x)$$

$$V(x) = \int (y_1(x))^{-2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

مثال۱۴) اگر $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ جوابی از معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$$

باشد.جواب عمومی آن برابراست با:

1) $y_g = x^{1/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

2) $y_g = x^{-1}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

3) $y_g = x^{-1/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

4) $y_g = x^{-1}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

حل: گزینه (3)

$$y_2(x) = V(x)y_1(x)$$

$$V(x) = \int (x^{-1/2}\cos x)^{-2} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx$$

$$V(x) = \tan x$$

$$y_2(x) = x^{-1/2}\sin x$$

$$y_g(x) = x^{-1/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

جواب این معادله e^{x} است . جواب دیگر این معادله دیفرانسیل از حل کدامیک از گزینه ها به دست می آید؟

1) $2x\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}y\right)-(2x-3)\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right)=0$

2) $2x\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}y\right)-(2x+3)\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right)=0$

3) $2x\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}y\right)+(2x+3)\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right)=0$

4) $2x\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}y\right)+(2x-3)\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right)=0$

حل:گزینه(4)

$$
\begin{aligned}
& y_2(x)=V(x)y_1(x)\Rightarrow y_2{}' = e^{x}(V'+V)\Rightarrow \\
& y_2{}'' = e^{x}(V''+2V'+V) \\
& 2xe^{x}(V''+2V'+V)-(2x+3)e^{x}(V'+V)+3Ve^{x}=0 \\
& 2xv''+4xv'-(2x+3)v'=0\Rightarrow \\
& 2xv''+(2x-3)V'=0 \\
& 2x\left(e^{-x}y_2\right)''+(2x-3)\left(e^{-x}y_2\right)'=0
\end{aligned}
$$

معادلات خطی غیر همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت (روش ضرایب نامعین) صورت کلی یک معادله خطی غیرهمگن مرتبـه دوم بـا ضرایب ثابت به صورت زیر می باشد.

$$y''+ay'+by=r(x)$$

جواب عمومی مجموع جواب عمومی قسمت همگن وجواب خصوصی میباشد .

$$y=y_g+y_p$$

روش ضرایب نامعین

این روش برای به دست آوردن جواب خصوصی معادلات خطی به کار رفته ومبتنی بر تعیین فرم وترکیب کلی جواب خصوصی و به دست آوردن ضرایب ثابت این ترکیب با جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل می باشد . این روش را در حالت های خاصی کـه $r(x)$ به صورت های زیر می باشد به کار می بریم .

الف) $r(x)$ یک تابع چند جمله ای به صورت زیر میباشد.

$$r(x)=c_0+c_1x+\mathbf{K}+c_mx^m$$

در این صورت جواب خصوصی یک تابع به صورت زیر است:

اگر صفر ریشه معادله مشخصه نباشد.

$$y_p(x)=A_0+A_1x+\mathbf{K}+A_mx^m$$

$$y_p(x)=x^2\left(A_0+A_1x+\mathbf{K}+A_mx^m\right)$$

نکته : برای معادلات خطی غیر همگن مرتبه دوم به صورت $y''+p(x)y'+g(x)y=ri(x)$ که $y_{p_h}(x), y_i(x), 1<i\le k$ جواب عمومی و خصوصی معادله فوق بوده آنگاه جواب خصوصی وعمومی (کلی) معادله فوق عبارتست از :

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+\mathbf{K}+y_{p_k}$$
$$y=y_1+y_2+\mathbf{K}+y_k$$

مثال ۱۶)جواب معادله دیفرانسیل برابر است با :

1) $y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+1/5x$

2) $y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+2/5x-8/25$

3) $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+2/5x-8/5$

4) هیچ‌کدام

حل: گزینه (2)

$$l^2+4l+5=0\Rightarrow l_1, l_2=-2\pm i\Rightarrow$$
$$y_g(x)=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$
$$y_p=Ax+B\Rightarrow y_p'=A, y_p''=0$$
$$4A+5Ax+5B=2x\Rightarrow A=2/5, B=-8/5$$

ب) $r(x)$ یک تابع نمایی به صورت زیر می باشد

$$r(x)=ce^{ax}$$

اگر a ریشه معادله مشخصه نباشد :

$$y_p(x)=Ae^{ax}$$

اگر a ریشه معادله مشخصه باشد: (rمرتبه تکرار می باشد .)

$$y_p(x)=Ax^2e^{ax}$$

مثال ۱۷) جواب معادله روبه رو عبارتست از : $9y''+6y'+y=e^{-x/3}$

1) $c_1e^{-x/3}+c_2xe^{-x/3}-118x^2e^{-x/3}$

2) $c_1e^{-x/3}+c_2xe^{-x/3}-1/9x^2e^{-x/3}$

3) $c_1e^{-x/3}+c_2xe^{-x/3}+1/18x^2e^{-x/3}$

4) $c_1e^{-x/3}+c_2xe^{-x/3}+1/9x^2e^{-x/3}$

حل : گزینه (3)

$$y_g = c_1 e^{-x/3} + c_2 x e^{-x/3}$$
$$y_p(x) = Ax^2 e^{-x/3} \Rightarrow A = 1/18$$

مثال ۱۸)جواب خصوصی معادله $(D+2)(D-3)y = e^{-2x} + 2x^2$ **کدام است؟**

1) $c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

2) $c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$

3) $c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

4) $c_1 e^{-2x} + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$

حل : گزینه (2)

$$(D+2)(D-3)y = 0 \Rightarrow l_1 = -2, l_2 = 3 \Rightarrow y_g(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}$$
$$y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^3 + c_4 x + c_5$$

مثال ۱۹) جواب کلی معادله دیفرانسیل $(D^2 - 4D + 3)y = e^{4x}$ **برابر است با :**

1) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + 1/3 e^{4x}$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + 1/3 e^{4x}$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - 1/3 e^{4x}$

4) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - 1/3 e^{4x}$

حل: گزینه (2)

$$l^2 - 4l + 3 = 0 \Rightarrow l_1 = 1, l_2 = 3 \Rightarrow$$
$$y_g(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$
$$y_p(x) = Ae^{4x} \Rightarrow y_p' = 4Ae^{4x}, y_p'' = 16Ae^{4x} \Rightarrow$$
$$A = 1/3$$

ج) $r(x)$ یک تابع مثلثاتی به صورت زیر می باشد :

$$r(x) = c_1 \sin bx + c_2 \cos bx$$

اگر bi ریشه معادله مشخصه نباشد .

$$y_p(x) = A\sin bx + B\cos bx$$

اگر bi ریشه معادله مشخصه باشد(rمرتبه تکرار می باشد .)

$$y_p(x) = x^2(A\sin bx + B\cos bx)$$

$y'' + 2y' + 5y = 16e^{x} + \sin 2x$

حل :

$$l^2 + 2l + 5 = 0 \Rightarrow l_1 = -1 \pm 2i,\ l_2 = -1 - 2i$$
$$y_g = e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$$
$$y_p = ce^{x} + K\cos 2x + M\sin 2x$$
$$y_p' = ce^{x} - 2K\sin 2x + 2M\cos 2x$$
$$y = ce^{x} - 4K\cos 2x - 4M\sin 2x$$
$$8ce^{x} + (-4K + 4M + 5K)\cos 2x + (-4M - 4K + 5M)\sin 2x$$
$$+16e^{x} + \sin 2x$$
$$8c = 16, K + 4M = 0, -4K + m = 1 \Rightarrow$$
$$c = 2, K = -4/17, M = 1/17$$

$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2e^{x} - 4/17\cos 2x + 1/17\sin 2x$

د) $r(x)$ حاصلضرب چند جمله ای درجه m در تابع نمایی به صورت زیر می باشد

$r(x) = f(x)e^{ax}$

اگر a ریشه معادله مشخصه نباشد

$$y_p(x) = \left(A_0 + A_1x + \mathbf{K} + A_mx^m\right)e^{ax}$$

اگر a ریشه معادله مشخصه باشد(rمرتبه تکرار می باشد .)

$$y_p(x) = x^2\left(A_0 + A_1x + \mathbf{K} + A_mx^m\right)e^{ax}$$

مثال ۲۱) جواب خصوصی معادله دیفرا نسیل زیر را بیا بید .

$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$

حل :

$$l^2 + 4l + 4 = 0 \Rightarrow l = -2, -2$$
$$y_p = x^2(A_0 + A_1x)e^{-2x}$$

مثال ۲۲) جواب خصوصی معادله زیر کدام است ؟

$y'' - 2y' = (x - 2)e^{2x}$

1) $xe^{2x}(5/4 - 1/4x)$

2) $xe^{2x}(-5/4 - 1/2x)$

3) $xe^{2x}(-5/4 + 1/2x)$

4) $xe^{2x}(-5/4 + 1/4x)$.

$$l^2 - 2l = 0 \Rightarrow l_1 = 0,\ l_2 = 2 \Rightarrow$$
$$y_p = x(A_0 + A_1 x)e^{2x}$$
$$4A_1 x + 2(A_1 + A_0) = x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 4A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1/4 \\ A_0 = -5/4 \end{cases}$$

مثال ۲۳) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y^{(4)} - y'' = x + e^x$ **عبارتست از :**

1) $x(ax+b) + cx^2 e^x$ 2) $x(ax+b) + cxe^x$

3) $x^2(ax+b) + cxe^x$ 4) $x^2(ax+b) + cxe^x$

حل : گزینه (3)

$$l^4 - l^2 = 0 \Rightarrow l^2(l^2 - 1) = 0 \Rightarrow l = 0, \pm 1$$
$$y_p(x) = x^2(ax+b)e^{0x} + cxe^x$$
$$e^{0x} = 1$$

مثال ۲۴) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(D^2 - 8D + 16)y = x^2 e^{4x}$ **عبارتست از :**

1) $y = Ax^2 e^{2x} + Bxe^{2x}$

2) $y = Ax^2 e^{2x} + Bxe^{2x} + ce^{2x}$

3) $y = Ax^4 e^{2x} + Bx^3 e^{2x} + cx^2 e^{2x}$

4) $y = Ax^4 e^{2x} + Bx^3 e^{2x} + cxe^{2x}$

حل : گزینه (3)

$$l^2 - 8l + 16 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = 4 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$
$$y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + c)e^{4x}$$

۵) $r(x)$ تابعی به صورت زیر می باشد :

$$r(x) = f_1(x)\sin bx + f_2(x)\cos bx$$

$f_1(x), f_2(x)$ چندجمله هایی از درجه m,n هستند . و $s = \max\{m,n\}$

اگر bi ریشه معادله مشخصه نباشد

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_s x^s)\sin bx + (B_0 + B_1 x + \mathbf{K} + B_s x^s)\cos bx$$

اگر bi ریشه معادله مشخصه باشد(rمرتبه تکرار می باشد .)

$$y_p(x) = x^r(A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_s x^s)\sin bx + x^r(B_0 + B_1 x + \mathbf{K} + B_s x^s)\cos bx$$

1) $(Ax^2+Bx)\sin x+(cx^2+Dx)\cos x$

2) $(Ax+Bx)\sin x+(cx+Dx)\cos x$

3) $(Ax^2+Bx)\sin x+(cx+Dx)\cos x$

4) $(Ax+Bx)\sin x+(cx^2+Dx)\cos x$

حل : گزینه (1)

$$l^2+1=0\Rightarrow l_1,l_2=\pm i\Rightarrow y_p(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$
$$y_p(x)=x(Ax+B)\cos x+x(cx+D)\sin x$$

و) $r(x)$ تابعی به صورت زیر می باشد:

$$r(x)=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$$

اگر $a+bi$ ریشه معادله مشخصه نباشد

$$y_p(x)=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$$

اگر $a+bi$ ریشه معادله مشخصه باشد(rمرتبه تکرار می باشد .)

$$y_p(x)=x^re^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$$

مثال ۲۶) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر کدام گزینه است ؟

$$y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 2x$$

1) $y_p(x)=x^2e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

2) $y_p(x)=e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

3) $y_p(x)=xe^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

4) $y_p(x)=(Ax+B)e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

حل : گزینه (3)

$$l^2+6l+13=0\Rightarrow l=-3\pm 2i$$
$$y_p(x)=xe^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

مثال ۲۷) فرم جواب خصوصی $(D^2+4)y=x^2\cos 2x$ **رابه دست آورید.**

حل:

$$(D^2+4)=0\Rightarrow l_1=-2i,\ l_2=2i\Rightarrow$$
$$y_g(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

چون جمله $x^2\cos x$ در $r(x)$ وجود دارد $\cos 2x$ نیز در $y_g(x)$ با درجه 1 می باشد بنابراین :

$$y_p(x)=A_1x^3\cos 2x+A_2x^3\sin 2x+A_3x^2\cos 2x+A_4x^2\sin 2x+A_5x\cos 2x+A_6x\sin 2x$$

مثال ۲۸) جواب خصوصی معادله ناهمگن زیر کدام است ؟

$$\left(D^2-2D+2\right)\left(D^2+D\right)^2 y = x^2+1+2x^2e^x\sin x + x\sinh x$$

حل : می دانیم که : $x\sinh x = \frac{x}{2}e^x - \frac{x}{2}e^{-x}$

$$l = 1\pm i,0,0,-1,-1$$

$$y_p(x) = x^2\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)e^{0x} + x^1e^x\left(\left(B_2x^2+B_1x+B_0\right)\sin x+\left(c_2x^2+c_1x+c_0\right)\cos x\right)+$$

$$x^0\left(D_1x+D_0\right)e^x + x^2\left(Dx+D\right)e^{-x}$$

مثال ۲۹) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'''-3y''+3y'=x$ **کدامیک از گزینه های زیر می باشد ؟**

1) $-1/6x^2-1/3x$ 2) $1/3x^2+1/6x$

3) $1/3x^2-1/6x$ 4) $1/6x^2+1/3x$

حل: گزینه (4)

$$l^3-3l^2+3l=0 \Rightarrow l=0,\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$y_p(x) = x'(ax+b)$$

$$y_p(x) = ax^2+bx$$

$$y_p{}' = 2ax+b,\ y^n = 2a,\ y''' = 0 \Rightarrow -6a+6ax+3b = x \Rightarrow \begin{cases} a=1/6 \\ b=1/3 \end{cases}$$

$$y_p(x) = 1/6x^2+1/3x$$

ز) $r(x)$ به صورت مجموع چند تابع از حالت های بررسی شده قبلی باشد در این حالت از اصل بر هم نهی جواب ها استفاده می شود.

مثال۳۰) معادله $y'''+y'=x^2+\sin 2x+xe^{2x}$ **راحل کنید.**

حل:

$$l^3+l=0 \Rightarrow l_1=0,\ l_2=-i,\ l_3=i \Rightarrow$$

$$y_g(x) = c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$$

$$y_p(x) = y_{1p}(x)+y_{2p}(x)+y_{3p}(x)$$

$$y_{1p}(x) = x\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)$$

$$y_{2p}(x) = A\cos 2x+B\sin 2x$$

$$y_{3p}(x) = \left(B_1x+B_2\right)e^{2x}$$

با جایگذاری هریک از جواب ها در معادله ضرایب نامعین جواب نهایی تعیین می شود .

(جواب ها می توانند جداگانه ویا به صورت ترکیب خطی سه جواب در معادله ضریب نامعین به کار برده شوند .)

$$(D^3+2D^2-D-2)y=e^x+3x$$

$\frac{1}{2}$ (1 $\frac{1}{3}$ (2

$\frac{1}{4}$ (3 $\frac{1}{6}$ (4

حل :گزینه (4)

$$(D^2-1)(D+2)y=0 \Rightarrow l_1=1, l_2=-1, l_3=-2 \Rightarrow$$

$$y_g(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}$$
$$y_{1p}=Ae^x+Bxe^x$$
$$y_{2p}=cx+D$$
$$y'_{1p}=Ae^x+Be^x+Bxe^x$$
$$y''_{1p}=Ae^x+2Be^x+Bxe^x$$
$$y'''_{1p}=Ae^x+3Be^x+Bxe^x$$

(A هر مقدار دلخواهی می تواند باشد.)

معادلات خطی با ضرایب ثابت (روش اپراتورهای معکوس)

برای حالت های خاصی از $r(x)$ در معادله دیفرانسیل $y=\frac{1}{F(D)}r(x)$ می توان روش های کوتاه ارائه داد که در زیر بـه صـورت خلاصه آورده شده اند.

الف) $r(x)$ یک تابع چند جمله ای به صورت زیر باشد .

$$r(x)=c_0+c_1x+\mathbf{L}+c_mx^m$$

در این صورت جواب خصوصی یک تابع به صورت زیر است :

(ضرایب a_0, a_1, $\mathbf{L}$ از تقسیم مستقیم $\frac{1}{F(D)}$ به دست می آید .)

$$y_p=\frac{1}{F(D)}r(x)=(a_0+a_1D+\mathbf{L}+a_mD^m)x^m$$

مثال ۳۲) معادله دیفرانسیل $(2D^2+2D+1)y=x^2+2x-3$ راحل کنید .

حل :

$$2l^2+2l+1=0 \Rightarrow l_{1,2}=-1/2\pm 1/2i$$

$$y_g = e^{\;\;2}(c_1 \cos 1/2x + c_2 \sin 1/2x)$$

$$y = \frac{1}{2D^2+2D+1}\left(x^2+2x-3\right)$$

با ضرب طرفین و متحد قرار دادن ضرایب طرفین می توان نوشت :

$$\frac{1}{2D^2+2D+1} = A_1 + A_2 D + A_3 D^2$$

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = -2$$

$$A_3 = 2$$

$$y_p = \left(1-2D+2D^2\right)\left(x^2+2x-3\right) = \left(x^2+2x-3\right) - 2(2x+2) + 2(2) = x^2-2x-3$$

$$y_p = x^2-2x-3$$

ب) $r(x)$ یک تابع نمایی به صورت زیر باشد :

$$r(x) = ce^{ax}$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}$$

$$F(a) \neq 0$$

مثال ۳۳) معادله $\left(D^3-2D^2-5D+6\right)y = \left(e^{-3x}+2\right)^2$ **را حل کنید** .

حل :

$$l^3-2l^2-5l+6=0 \Rightarrow l_1=1,\ l_2=-2,\ l_3=3$$

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{-6x} + \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}\left(4e^{-3x}\right) + \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}\left(4e^{0x}\right)$$

$$= -\frac{1}{252}e^{-6x} - \frac{1}{6}e^{-3x} + \frac{2}{3}$$

مثال ۳۴) جواب خصوصی معادله $\left(D^3-2D^2-5D+6\right)y = e^{-2x}$ **کدام است ؟**

1) $\frac{1}{15}e^{-2x}$ 2) xe^{-2x}

3) $\frac{1}{15}xe^{-2x}$ 4) e^{-2x}

حل : گزینه (3)

در این حالت خاص $F(-2)=0$ است .

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{-2x} + \frac{1}{D+2}\times\frac{1}{(D-1)(D-3)}\left(e^{-2x}\right) = \frac{1}{(D+2)}\left(\frac{1}{(-3)(-5)}e^{-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{15}\times\frac{1}{D+2}e^{-2x}$$

$$u = \frac{1}{D+2}e^{-2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} + 2u = e^{-2x} \Rightarrow$$

$$u = e^{-2x}\int e^{-2x}e^{2x}dx = xe^{-2x}$$

$$y = \frac{1}{15}xe^{-2x}$$

ج) $r(x)$ تابعی به صورت زیر باشد :

$$r(x) = f(x)e^{ax}$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)}f(x)e^{ax} = \frac{1}{F(D+a)}f(x)$$

مثال ۳۵) معادله $(D^2 - 4)y = x^2e^{4x}$ را حل کنید .

حل :

$$l^2 - 4 = 0 \Rightarrow l_1 = 2, l_2 = -2 \Rightarrow$$

$$y_g(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2-4}x^2e^{4x} = e^{4x}\left(\frac{1}{(D+4)^2-4}\right)x^2 = e^{4x}\left(\frac{1}{D^2+8D+12}\right)x^2$$

$$= e^{4x}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}D + \frac{13}{432}D^2\right)x^2$$

$$y_p(x) = e^{4x}\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{13}{216}\right)$$

مثال ۳۶) جواب خصوصی معادله $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$ کدام است ؟

1) $e^{-x}(x^2 - 1)$ 2) $e^{-x}(x^2 + 2)$

3) $e^{-x}(x^2 - 2)$ 4) $e^{-x}(x^2 + 1)$

حل : گزینه (3)

$$(D^2 + 2D + 2)y = x^2e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{D^2+2D+2}\left(x^2e^{-x}\right) = \frac{1}{(D+1)^2+1}\left(x^2e^{-x}\right) = e^{-x}\frac{1}{D^2+1}x^2$$

برای به دست آوردن اثر عملگرا فوق بر تابع کافیست 1 را $D^2 + 1$بر تقسیم کرده و خارج قسمت را تا ادامه دهیم .

$$1 \qquad \left|\overline{1-D^2+\mathbf{L}}\right.$$

$$\frac{1+D^2}{-D^2}$$

$$\frac{-D^2-D^4}{\mathrm{M}}$$

$$(1-D^2)x^2 = x^2-2$$
$$y_p = e^{-x}(x^2-2)$$

د) $r(x)$ یک تابع مثلثاتی به صورت زیر باشد .

$$r(x)=\sin(ax+b)$$
$$r(x)=\cos(ax+b)$$

$$1)y_p = \frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b) \leftrightarrow F(-a^2)\neq 0$$

$$2)y_p = \frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b) \leftrightarrow F(-a^2)\neq 0$$

مثال ۳۷) معادله دیفرانسیل $(D^2+3D-4)y=\cos 2x$ **راحل کنید.**

$$l^2+3l-4=0 \Rightarrow l_1=1, l_2=-4$$

$$y_g(x)=c_1e^x+c_2e^{-4x}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{(D^2+3D-4)}\cos 2x = \frac{1}{(-4+3D-4)}\cos 2x = \frac{1}{3D-8}\cos 2x$$

$$y_p(x)=\frac{3D+8}{9D^2-64}\cos 2x = -\frac{1}{100}(3D+8)\cos 2x = -\frac{1}{100}(-6\sin 2x+8\cos 2x)$$

مثال ۳۸) جواب خصوصی معادله $(D^2+9)y=\sin 2x$ **کدام است ؟**

1) $-\frac{1}{5}\cos 2x$ 2) $\sin 2x$

3) $\frac{1}{5}\sin 2x$ 4) $\cos 2x$

حل : گزینه (3)

$$l^2+9=0 \Rightarrow l_1=-3i, l_2=3i \Rightarrow$$

$$y_g(x)=c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+9}\sin 2x=\frac{1}{-(2)^2+9}\sin 2x=\frac{1}{5}\sin 2x$$

مثال ۳۹) جواب خصوصی معادله $(D^4+10D^2+9)y=-2\cos 2t$ **عبارتست از :**

1) $\frac{1}{15}\cos 2t$ 2) $-\frac{1}{15}\cos 2t$

3) $-\frac{1}{5}\cos 2t$ 4) $\frac{2}{15}\cos 2t$

حل : گزینه (4)

$$y_p(t)=\frac{1}{D^4+10D^2+9}(-2\cos 2t)=\frac{1}{(-4)^2+10(-4)+9}(-2\cos 2t)$$

$$y_p=\frac{2}{15}\cos 2t$$

مثال ۴۰) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-2y'+y=\sin 2x$ **کدام یک از گزینه های زیر است ؟**

1) $\frac{-4\sin 2x+3\cos 2x}{16}$ 2) $\frac{-3\sin 2x+4\cos 2x}{25}$

3) $\frac{3}{25}\sin 2x$ 4) $-\frac{4}{25}\cos 2x$

حل : گزینه (2)

$$y_p=\frac{1}{D^2-2D+1}(\sin 2x)=\frac{1}{-(2)^2+1-2D}(\sin 2x)=\frac{1}{-3-2D}(\sin 2x)$$

صورت و مخرج را در مزدوج ضرب می کنیم

$$\Rightarrow \frac{-3+2D}{9-4D^2}\sin 2x=\frac{-3\sin 2x+4\cos 2x}{9+16}$$

مثال ۴۱) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'''+2y''+y'-2y=e^x+\sin x$ **عبارتست از :**

1) $\frac{e^x}{2}-\frac{\sin x}{4}$ 2) $\frac{e^x}{4}+\frac{\sin x}{2}$

3) $-\frac{e^x}{4}+\frac{\sin x}{2}$ 4) $\frac{e^x}{2}+\frac{\sin x}{4}$

حل : گزینه (1)

$$y_p=\left(\frac{1}{D^3+D^2+D-2}\right)e^x+\left(\frac{1}{D^3+2D^2+D-2}\right)\sin x$$

$$=\frac{1}{2}e^x+\left(\frac{1}{-D-2+D-2}\right)\sin x=\frac{e^x}{2}-\frac{1}{4}\sin x$$

مثال ۴۲) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(D^2+2D+4)y=e^{-2x}\cos 2x$ عبارت است از :

$\frac{e^{-2x}}{4}[\sin 2x+2\cos 2x]$ (1 $\qquad$ $-\frac{e^{-2x}}{4}\sin 2x$ (2

$\frac{e^{-2x}}{4}\cos 2x$ (3 $\qquad$ $\frac{e^{-2x}}{4}[2\sin 2x+\cos 2x]$ (4

حل : گزینه (2)

$$y_g=e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x\right)$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+2D+4}e^{-2x}\cos 2x=e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^2+2(D-2)+4}\cos 2x$$

$$=e^{-2x}\frac{1}{D^2-2D+4}\cos 2x=e^{-2x}\frac{1}{-2D}\cos 2x$$

$$=-\frac{e^{-2x}}{2}\frac{1}{D}\cos 2x=-\frac{e^{-2x}}{4}\sin 2x$$

۵) $r(x)$ تابعی به صورت زیر باشد :

$$r(x)=xf(x)$$

$$y_p=\frac{1}{F(D)}xf(x)=x\frac{1}{F(D)}fx-\frac{F'(D)}{[F(D)]^2}$$

مثال ۴۳) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(D^2+3D+2)y=x\sin 2x$ **تعیین کنید .**

حل :

$$y_p=\frac{1}{D^2+3D+2}x\sin 2x$$

$$=x\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x-\frac{2D+3}{\left(D^2+3D+2\right)^2}\sin 2x$$

$$-\frac{1}{19}x(3\cos 2x+2\sin 2x)-\frac{1}{50}(24\sin 2x+7\cos 2x)$$

تبصره : اگر در معادله دیفرانسیل $(D-a)^n y=R(x)$ داشته باشیم $R(x)=ae^{ax}$ آنگاه خواهیم داشت :

$$y_p=\frac{a}{n!}x^n e^{ax}$$

نتیجه ۱) اگر $R(x)=ax^m e^{ax}$ آنگاه

$$y_p=\frac{a}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}x^{m+n}e^{ax}$$

نتیجه ۲) اگر $R(x)=ae^{ax}\sin(bx)$ آنگاه

$$y_p=\begin{cases}\pm\dfrac{a}{b^n}e^{ax}\cos(bx) & n=2K+1\\[2mm] \pm\dfrac{a}{bn}e^{ax}\sin(bx) & n=2K\end{cases}$$

نتیجه ۳) اگر $R(x)=ae^{ax}\cos(bx)$ آنگاه

$$y_p=\begin{cases}\pm\dfrac{a}{b^n}e^{ax}\sin(bx) & n=2K+1\\[2mm] \pm\dfrac{a}{bn}e^{ax}\cos(bx) & n=2K\end{cases}$$

مثال ۴۴) جواب خصوصی معادله $(D-2)^2(D-1)^3=e^x+e^{2x}+4$ کدام است ؟

1) $\frac{x^3}{4}e^x-\frac{x^2}{2}e^{2x}-1$

2) $-\frac{x^3}{6}e^x+\frac{x^2}{2}e^{2x}+1$

3) $\frac{x^3}{4}e^x+\frac{x^2}{2}e^{2x}-1$

4) $\frac{x^3}{6}e^x+\frac{x^2}{2}e^{2x}-1$

نکته : در معادله دیفرانسیل $(D-a)^n q(D)=ae^{ax}$ جواب خصوصی به صورت زیر محاسبه می شود .

$$y_p(x)=\frac{a}{n!q(a)}x^n e^{ax}$$

حل : گزینه (4)

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}e^x+\frac{1}{F(D)}e^{2x}+\frac{1}{F(D)}4e^{0x}$$

$$y_p(x)=\frac{x^3}{(1-2)^2 3!}e^x+\frac{x^2}{(2!)(2-1)^3}e^{2x}+\frac{4x^0}{(-2)^2(-1)^3}e^{0x}$$

همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ به صورت $y_g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ باشد برای پیدا کردن جواب خصوصی y_p مربوط به معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ به صورت زیر عمل می کنیم .

$$\begin{cases} y_p = V_1y_1 + V_2y_2 \\ W = y_1y_2' - y_2y_1' \end{cases} \Rightarrow \quad V_1 = \int \frac{-y_2r(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$V_2 = \int \frac{y_1r(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

نکته : روش فوق روش کلی برای حل هر نوع معادله مرتبه دوم به کار می رود .

مثال ۴۵) اگر $y_1(x)=\frac{\cos x}{x}$ جوابی همگن از معادله دیفرانسیل $xy'' + 2y' + xy = \cot x$ باشد . جواب کلی معادله فوق را به دست آورید .

حل : طبق نکته ذکر شده در همین فصل با استفاده از یک جواب برای یافتن جواب دیگر معادله مرتبه دوم همگن داریم .

$$y_2(x)=u(x)y_1(x)$$

$$u(x)=\int (y_1(x))^{-2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$\int\int\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{-2}e^{-2\int\frac{dx}{x}}dx$$

$$u(x)=\tan x \Rightarrow y_2(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$y_p(x)=V_1y_1+V_2y_2$$

$$W(y_1,y_2)=\frac{1}{x^2}$$

$$V_1(x) = -\int \frac{\text{[illegible]}}{\cos x} dx \Rightarrow V_1 x = \mathrm{Ln}\left|\sqrt{\frac{\text{[illegible]}}{1+\sin x}}\right| + \sin x$$

$$V_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$y_p(x) = \frac{\cos x}{x} \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

$$y(x) = c_1 y_1 x + c_2 y_2 x + y_p(x)$$

مثال ۴۶) جواب خصوصی معادله $y'' + y = \sec x$ کدام است ؟

1) $\cos x Ln(\cos x) + x \sin x$

2) $\sin x Ln(\sin x) - x \cos x$

3) $\sin x Ln(\cos x) + x \cos x$

4) $\cos x Ln(\sin x) - x \sin x$

حل : گزینه (1)

$$y'' + y = 0 \Rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x \Rightarrow y_1' = -\sin x, y_2' = \cos x \Rightarrow W(y_1, y_2) = 1$$

$$V_1 = \int \frac{-\sin x.\sec x}{1} dx = \mathrm{Ln}(\cos x)$$

$$V_2 = \int \frac{\mathrm{csx}.\sec x}{1} dx = x$$

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = \cos x \mathrm{Ln}(\cos x) + x \sin x$$

مثال ۴۷) جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$ کدام است ؟

1) $y = (A + xLnx)e^{-2x}$

2) $y = (A + Bx + x - Lnx)$

3) $y = \left(A + Bx + \frac{1}{x} - Lnx\right)e^{-2x}$

4) $y = (A + Bx + xLnx - x)e^{-2x}$

$$l^2+4l+4=0 \Rightarrow l_1=l_2=-2 \Rightarrow$$

$$y_g=(A+Bx)e^{-2x}$$

$$y_1=e^{-2x}, y_2=xe^{-2x} \Rightarrow W(y_1,y_2)=e^{-4x}$$

$$V_1=\int \frac{-xe^{-2x}.\frac{e^{-2x}}{x}}{e}dx=\int -dx=-x$$

$$V_2=\int \frac{e^{-2x}.\frac{e^{-2x}}{x}}{e^{-4x}}dx=\mathrm{Ln}x$$

مثال ۴۸)جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+y=\tan x$ عبارتست از:

1) $-\sin x Ln|\sec x+\tan x|$

2) $-\cos Ln|\sec x+\tan x|$

3) $\cos x Ln|\mathrm{cosec} x+\sin x|$

4) $\sin x Ln|\cos x+\tan x|$

حل:گزینه (2)

$$y''+y=0 \Rightarrow y_g(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$$

$$W(y_1,y_2)=-1$$

$$V_1=\int \frac{-\cos x.\tan x}{-1}dx=-\cos x$$

$$V_2=\int \frac{\sin x.\tan x}{-1}dx=-\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx$$

نکته :

$$\int \frac{1}{\cos x}=|Ln\sec x+\tan x|$$

$$V_2=-\mathrm{Ln}|\sec x+\tan x|+\sin x$$

$$y_p(x)=-\cos x\mathrm{Ln}|\sec x+\tan x|$$

الف)معادله کوشی - اویلر به صورت زیر است :

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \mathbf{L} + a_1 x y' + a_0 y = R(x)$$

با تعریف نماد $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$ معادلات دیفرانسیل کوشی - اویلر به صورت زیر نوشته می شوند .

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k D^k y = R(x)$$

برای تبدیل معادله دیفرانسیل فوق به معادلات با ضرایب ثابت تغییر متغیر $x = e^z$ را اختیار مـی کنـیم بـا تعریـف $D'^n = \dfrac{d^n}{dz^n}$ ثابت می شود .

$$x^n D^n y = D'(D'-1)(D'-2)\mathbf{L}\ (D'-(n-1))y$$

که برای حالت $n = 3, n = 2$ می توان نوشت :

$n = 2:$

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x) \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = f(e^z)$$

$$\left(D'^2 + (a-1)D' + b\right) y = f(e^z)$$

$$y = e^{\lambda z} \Rightarrow \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

مثال ۴۹) جواب معادله $(x^3 D^3 + 3x^2 D^2 - 2xD + 2)y = 0$ **کدام است ؟**

1) $c_1 x + c_2 x Lnx + \dfrac{c_3}{x^2}$

2) $c_1 x + c_2 x Lnx + \dfrac{c_3}{x}$

3) $c_1 x + c_2 x Lnx - c_3 x$

4) $c_1 x + c_2 x Lnx + c_3 x^2$

حل : گزینه (1)

$n = 3$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 3\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$$

$$y_g = c_1 e^z + c_2 z e^z + c_3 e^{-2z}$$

$$x = e^z \Rightarrow z = Lnx \Rightarrow y = c_1 x + c_2 x Lnx + \frac{c_3}{x^2}$$

۱- یک جواب خصوصی مسئله $y''+2xy'^2=0$ و $y(0)=y'(0)=1$ را به دست آورید؟

حل:

با توجه به اینکه معادله فوق فاقد متغیر y است، فرض می کنیم $y'=p$ و $y''=\frac{dp}{dx}$ باشد، معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{dp}{dx}+2px^2=0 \qquad \Rightarrow p=y'=\frac{1}{x^2+c}$$

$$y'(0)=1\Rightarrow c=1$$

$$y'=\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow$$
$$y=\tan^{-1}x+c\Rightarrow y=1+\tan^{-1}(x)$$

۲- جواب معادله دیفرانسیل $y''+y'^3e^{2y}=0$ را به دست آورید؟

حل: معادله فاقد متغیر x است. با فرض $y'=p$ و $y''=p\frac{dp}{dy}$ خواهیم داشت:

$$\frac{dp}{p^2}=-e^{2y}dy\Rightarrow p=y'=\frac{1}{\frac{1}{2}e^{2y}-c_1}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}e^{2y}-c_1y=x+c_2$$

با فرض $c_1=0$ لذا $\frac{1}{4}e^{2y}=x+c_2$ گزینه (1) درست است.

۳- در معادله دیفرانسیل $2xy'^2+y''=0$، اگر $x\to\infty$ آنگاه y' به کدام عدد میل خواهد کرد؟

حل: معادله فاقد y است بنابراین از تیغه متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$y'=p \quad \text{و} \quad y''=p'=\frac{dp}{dx}$$

$$2xp^2+\frac{dp}{dx}=0\Rightarrow 2xdx+\frac{dp}{p^2}=0\Rightarrow x^2-\frac{1}{p}=c_1$$
$$\Rightarrow p=\frac{1}{x^2-c_1}\Rightarrow\lim y'=\lim p=0$$

۴- مسئله $xy''-y'=3x^2$ با شرط $y(0)=0$ و $y'(1)=0$ را حل کنید.

حل:

روش اول) معادله فاقد y است لذا قرار می دهیم $y'=p$.

روش دوم) با تقسیم طرفین معادله بر x^2 خواهیم داشت:

$\Leftarrow \frac{\quad}{x^2} = 3 \Leftarrow \frac{d}{dx}(\frac{\quad}{x}) = 3 \quad \frac{\quad}{x} = 3x + c_1$ ، $y' = 3x^2 + c_1 x$

با انتگرال گیری خواهیم داشت $y = x^3 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2$. چون $y(0) = 0$ است لذا $c_2 = 0$ و از شرط $y'(1) = 0$ داریم $c_1 = -3$ پس جواب $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ است.

۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - (y')^2 + y(y')^3 = 0$ **را به دست آورید؟**

حل:

گزینه(2) درست می‌باشد. معادله فاقد متغیر مستقل x است. قرار می دهیم $y' = p$ و در نتیجه $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

$$\Rightarrow p\frac{dp}{dy} - p^2 + yp^3 = 0 \Rightarrow p\left(\frac{dp}{dy} - p + yp^2\right) =$$

$$\Rightarrow p = y' = 0 \Rightarrow y = c, \frac{dp}{dy} - p + yp^2 = 0 \Rightarrow p^{-2}\frac{dp}{dy} - p^{-1} = -y$$

$$p^{-1} = u \Rightarrow -p^{-2}\frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} + u = y$$

تغییر متغیر

معادله برنولی

$$\Rightarrow u = \frac{1}{p} = \frac{1}{y'} = e^{-\int dy}\left(\int e^{\int dy}(y)dy + c_1\right) \quad = e^{-y}\left(\int ye^y dy + c_1\right) = y - 1 + c_1 e^{-y}$$

$$\Rightarrow \left(y - 1 + c_1 e^{-y}\right)dy = dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - y - c_1 e^{-y} = x + c_2$$

۶- جواب معادله دیفرانسیل $x^2 yy'' - (xy' - y)^2 = 0$ **را به دست آورید؟**

حل:

قرار می دهیم $y = e^{\int u(x)dx}$ و در نتیجه $\quad y' = ue^{\int udx}$

ودر نتیجه:

$y'' = (u' + u^2)e^{\int udx}$، در معادله دیفرانسیل جایگزین می کنیم:

$$x^2 e^{\int u\,dx}\cdot\left(u'+u^2\right)e^{\int u\,dx}-\left(xue^{\int u\,dx}-e^{\int u\,dx}\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(u'+u^2\right)-\left(xu-1\right)^2=0\Rightarrow x^2\left(u'+u^2\right)-x^2u^2+2xu-1=0$$

$$\Rightarrow u'+\frac{2}{x}u=\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow u=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx+c_1\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int dx+c_1\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(x+c_1\right)=\frac{1}{x}+\frac{c_1}{x_2}$$

$$\Rightarrow y=e^{\int u(x)dx}=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{c_1}{x_2}\right)dx}=e^{\ln x-\frac{c_1}{x}+\ln c_2}=c_2xe^{\frac{-c_1}{x}}$$

۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''-(x+1)y'+y=0$ را به دست آورید؟

حل:

چون مجموع ضرایب متغیر وابسته صفر است لذا $y_1=e^x$ یک جواب معادله است و در نتیجه چون معادله به صورت $a_2(x)y''-(ax+b)y'+ay=0$ است لذا $y_2=x_1+1$ جواب دیگر معادله است. پس $y=c_1e^x+c_2(x+1)$ جواب عمومی است.

۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ را به دست آورید؟

حل:

با توجه به اینکه $(2x-1)-(2x+1)+2=0$ پس $y_1=e^x$ یک جواب معادله است. از طرفی $y_2=2x+1$ نیز جواب معادله است پس $y=c_1e^x+c_2(2x+1)$ جواب عمومی است.

۹- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(1+x^2)y''-xy'+y=0$ را به دست آورید؟

با توجه به اینکه $y=x$ یک جواب معادله است جواب دیگر با توجه به فرمول آبل برابر است با:

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int-\frac{x}{1+x^2}dx}dx$$

$$=x\int\frac{1}{x^2}e^{\ln\left(1+x^2\right)}dx=x\int\frac{1+x^2}{x^2}dx=x\int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx$$

$$=x\left(-\frac{1}{x}+x\right)=-1+x^2$$

۱۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''+2y'+xy=0$ را بدست آورید:

فرض می کنیم جواب معادله دیفرانسیل به صورت $y=uv$ باشد در اینصورت

$$y'=u'v+uv' \quad \text{و} \quad y''=u''v+2u'v'$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\Rightarrow xuv'' + (2xu' + 2u)v' + (xu'' + 2u' + xu)v = 0$$

:با قرار دادن ضریب v'

$$2xu' + 2u = 0 \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow v'' + \left(x\frac{2}{x^3} + 2\frac{-1}{x^2} + x\frac{1}{x}\right)v = 0 \Rightarrow v'' + v = 0$$
$$\Rightarrow v = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$\Rightarrow y = uv = \frac{1}{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

۱۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - vy' + 12y = 0$ را به دست آورید؟

حل:

معادله مشخصه، معادله فوق برابر است با $m^2 - vm + 12 = 0$ و در نتیجه $m_1 = 3$ و $m_2 = 4$. پس جواب عمومی $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$.

۱۲- اگر e^{-x} و e^{2x} جواب های مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ باشد، مقدار $a - b$ را بیابید.

حل:

چون e^{-x} و e^{2x} جواب های مستقل خطی معادله می باشد، لذا $m_1 = -1$ و $m_2 = 2$ نتیجه می باشد. در نتیجه معادله مشخصه به صورت $(m-2)(m+1) = 0$ و در نتیجه $m^2 - m - 2 = 0$. پس معادله نظیر برابر $y'' - y' - 2y = 0$. در نتیجه $a = -1$ و $b = -2$ و در نتیجه $a - b = 1$ است.

۱۳- معادله دسته منحنی گذرنده از مبداء مختصات با معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 5y = 0$ را بدست آورید؟

حل:

معادله مشخصه برابر است با $m^2 - 4m + 5 = 0$. لذا $+2 \pm 3i$ ریشه های آن است لذا

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$
$$y(0) = 0 \text{ شرط} \qquad \Rightarrow y = c_2e^{2x} \sin 3x$$

۱۴- معادله دیفرانسیل حاصل از حذف c_1, c_2, c_3 از تابع $y = c_1e^{-x} + c_2xe^x + c_3e^x$ را به دست آورید؟

حل:

با توجه به معادله جواب عمومی دیده می شود که $m_1 = -1$ ریشه ساده و $m_2 = 1$ ریشه مضاعف معادله مشخصه است پس معادله به صورت $(m+1)(m-1)^2 = 0$ و در نتیجه

$$m^3 - m^2 - m + 1 = 0$$
$$y''' - y'' - y' + y = 0 \Rightarrow$$

آورید؟

حل:

معادله مشخصه را بیابیم که $m^3+m^2-m-1=0$. پس $m_1=-1$ یک ریشه معادله مشخصه است. با بدست آوردن دو ریشه دیگر داریم: $m_2=-1$ و $m_3=1$

جواب عمومی

$$y=c_1e^x+(c_2+c_3x)e^{-x}$$
$$y'=c_1e^x+c_3e^{-x}-(c_2+c_3x)e^{-x}$$
$$y''=c_1e^x-2c_3e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{-x}$$
$$\Rightarrow y(0)=0, y'(0)=0, y'''(0)=4 \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1+c_3-c_2=0 \\ c_1-2c_3+c_2=4 \end{cases}$$

$c_3=-2$ و $c_2=-1$ و $\Rightarrow c_1=1$

$$\Rightarrow y=e^x-(1+2x)e^{-x} \Rightarrow y(0)=0$$

۱۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''-6y'+9y=6x^2+2-12e^{3x}$ در $x=0$ را بیابید؟

حل:

$m^2-6m+9 \Rightarrow m=3$ ریشه مضاعف

جواب عمومی $y_g=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$

جواب خصوصی $=y_p(A_2x^2+A_1x+A_0)+Bx^2e^{3x}$

با بدست آوردن y' و y'' و جایگذاری در معادله، با حل دستگاه ضرایب زیر بدست می آید:

$A_2=\frac{2}{3}$ و $A_1=\frac{8}{9}$ و $A_0=\frac{2}{3}$ و $B=-6$

$$\Rightarrow y_p(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{2}{3}-6x^2e^{3x} \Rightarrow y_g(0)=\frac{2}{3}$$

۱۷- صورت کلی جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-6y'+13y=xe^{3x}\sin 2x$ را به دست آورید؟

حل:

ریشه های معادله مشخصه $m^2-6m+13=0$ برابر است با $m=3\pm 2i$. در نتیجه جواب خصوصی

$$y_p=xe^{3x}\left[(a_1x+a_0)\cos 2x+(b_1x+b_0)\sin 2x\right]$$

$$=e^{3x}\left[(a_1x^2+a_0x)\cos 2x+(b_1x^2+b_0x)\sin 2x\right]$$

حل:

با توجه به معادله مشخصه $m^2+9=0$ ریشه های آن برابر است با $m=\pm 3i$. در نتیجه جواب قسمت همگن برابر است با $y_g=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$. برای قسمت خصوصی با استفاده از روش تغییر پارامتر و $y_1=\cos 3x$ و $y_2=\sin 3x$، داریم:

$$\begin{aligned}
y_p &= \sin 3x\int\frac{\cos 3x\cdot\sec 3x}{3}dx-\cos 3x\int\frac{\sin 3x\cdot\sec 3x}{3}dx\\
&=\frac{1}{3}\sin 3x\int dx-\frac{1}{3}\cos 3x\int\tan 3x\,dx\\
&=\frac{x}{3}\sin 3x+\frac{1}{9}(\cos 3x)\ln|\cos 3x|
\end{aligned}$$

۱۹- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 3y' - 2y = 2e^{3x}$ **به ازاء** $x = 0$ **را به دست آورید؟**

حل:

$$\frac{1}{8}$$

۲۰- جواب خصوصی معادله $(D^2 + 2)y = 3\sin 2x$ **به ازاء** $x = \frac{x}{4}$ **را به دست آورید؟**

حل:

$$L(D) = D^2 + 2$$

و $a = 2$

$$\Rightarrow L(-2^2) = -2^2 + 2 = -2 \Rightarrow y_p = \frac{1}{L(-2)^2} 3\sin 2x = -\frac{3}{2}\sin 2x$$

$$y_p = -\frac{3}{2}\sin 2x \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}$$

۲۱- جواب خصوصی معادله $(D^3 + D^2 - 4)y = 8\sin(2x-1)$ **را به دست آورید؟**

$$y_p(x) = \frac{1}{D^3 + D^2 - 4} 8\sin(2x-1) =$$

$$\frac{1}{D(D^2) + D^2 - 4} 8\sin(2x-1)$$

$$= \frac{1}{D(-4) + (-4) - 4} 8\sin(2x-1)$$

$$\frac{-1}{4(D+2)} 8\sin(2x-1) = -\frac{1}{4}\frac{D-2}{D^3-4} 8\sin(2x-1)$$

$$\frac{-1}{4}\frac{D-2}{-4-4} 8\sin(2x-1) = \frac{1}{4}(D-2)\sin(2x-1)$$

$$\frac{1}{4}[2\cos(2x-1) - 2\sin(2x-1)] = \frac{1}{2}\cos(2x-1) - \frac{1}{2}\sin(2x-1)$$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+D+2}e^{-2x}\cos x=e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^2+(D-2)+2}\cos x$$

$$=e^{-2x}\frac{1}{D^2-3D+4}\cos x$$

$$=e^{-2x}\frac{1}{-1-3D+4}\cos x=\frac{-1}{3}e^{-2x}\frac{1}{D-1}\cos x$$

$$=\frac{-1}{3}e^{-2x}\frac{D+1}{D^2-1}\cos x=\frac{-1}{3}e^{-2x}\frac{D+1}{-1-1}\cos x$$

$$=\frac{1}{6}e^{-2x}(D+1)\cos x=\frac{1}{6}e^{-2x}(-\sin x+\cos x)$$

$$y_p(0)=\frac{1}{6}$$

۲۳- یک جواب خصوصی معادله $(D^2+2D-1)y=(x^2+2)e^{-2x}$ را به دست آورید؟

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+2D-1}(x^2+2)e^{-2x}=e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^2+2(D-2)-1}(x^2+2)$$

$$=e^{-2x}\frac{1}{D^2-1}(x^2+2)=-e^{-2x}\left(\frac{1}{1-D^2}(x^2+2)\right)$$

$$=-e^{-2x}\left[1+D^2+D^4+D^6+\cdots\right](x^2+2)=-e^{-2x}(x^2+2+2)=-(x^2+4)e^{-2x}$$

۲۴- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+4y=\frac{1}{x}e^{2x}\ln x$ به ازاء $x=1$ را به دست آورید؟

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-4D+4}\left(\frac{e^{2x}}{x}\ln x\right)=\frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}\frac{\ln x}{x}$$

$$e^{2x}\frac{1}{D^2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=e^{2x}\frac{1}{D}\int=\frac{\ln x}{x}dx=x^2\frac{1}{D}(\ln x)^2$$

تغییر متغیر $\qquad \ln x=t$

$$=e^{2x}\int(\ln x)^2dx$$

$$=e^{2x}\int t^2e^tdt=e^{2x}\left[\left(e^t\left(t^2-2t+2\right)\right)\right]=e^{2x}\left(x(\ln x)^2-2\ln x+2\right)$$

$$\Rightarrow y_p(1)=2e^2$$

حل:

$$y_p(x)\frac{1}{D^2+16}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{D^2+16}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{D^2+16}\left(\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$=\frac{1}{0+16}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{x}{2D}\left(\frac{1}{2}\cos 4x\right)=\frac{1}{32}+\frac{x}{4}\int\cos 4x dx=\frac{1}{32}+\frac{x}{16}\sin 4x$$

۲۶- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(D^2-4)y=x\cos 2x$ به ازاء $x=\frac{x}{4}$ را به دست آورید؟

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-4}x\cos 2x=x\frac{1}{D^2-4}\cos 2x-\frac{2D}{(D^2-4)^2}\cos 2x$$
$$=x\frac{1}{-2^2-4}\cos 2x-\frac{2D}{(-2^2-4)^2}\cos 2x=\frac{-1}{8}x\cos 2x-\frac{1}{32}D\cos 2x$$
$$=\frac{-1}{8}x\cos 2x-\frac{1}{32}(-2\sin 2x)=-\frac{1}{8}x\cos 2x+\frac{1}{16}\sin 2x$$

۲۷- معادله دیفرانسیل $y''+\left(x-\frac{1}{x}\right)y'+x^2y=0$ را با کدام تغییر متغیر مناسب به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل نمایید؟

حل: $y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow z=\frac{x^2}{2}$ قرار می دهیم

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)y'=\left(x-\frac{1}{x}\right)x\frac{dy}{dz}=\left(x^2-1\right)\frac{dy}{dz}=(2z-1)y'(z)=(2z-1)\frac{dy}{dz}$$

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dz}\left(x\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(\sqrt{2z}\frac{dy}{dz}\right)\cdot x$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2z}}y'(z)+\sqrt{2}zy''(z)\right)\sqrt{2z}=\frac{dy}{dz}+2zy''(z)$$

$$\Rightarrow y'(z)+2zy''(z)+(2z-1)y'(z)+2zy(z)=0$$

$$\Rightarrow 2zy''(z)+2zy'(z)+2zy(z)=0\Rightarrow y''(z)+y'(z)+y(z)=0$$

۲۸- جواب معادله دیفرانسیل $3x^2y''+xy'+y=0$، وقتی که $x\to 0^+$ را به دست آورید؟

حل:

با توجه به معادله کوشی- اویلر، قرار می دهیم $t=\ln x$ لذا داریم:

$$\Rightarrow y''(t)+(1-3)y'(t)+y(t)=0$$
$$\Rightarrow y''(t)-2y'(t)+y(t)=0$$

معادله مشخصه به صورت $m^2-2m+1=0$ می باشد که دارای ریشه مضاعف $m=1$ است لذا:

$$\Rightarrow y(x)=(c_1+c_2\ln x)x$$

$$\lim_{x\to 0^+} y(x)=\lim_{x\to 0^+}(c_1+c_2\ln x)x=\lim_{x\to 0^+}\frac{c_1+c_2\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow[x\to 0^+]{\text{هوپیتال}}\lim\frac{c_2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-c_2x^2}{x}=0$$

۲۹-معادله دیفرانسیل $(2x-3)^2y''+(2x-3)y'+4y=0$ با تغییر متغیر $t=\ln(2x-3)$ به چه معادله‌ای تبدیل می شود؟

حل:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{2}{2x-3}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{2}{2x-3}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{2}{2x-3}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{2x-3}\right)=$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}\frac{2}{2x-3}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{-4}{(2x-3)^2}$$

$$=\frac{4}{(2x-3)^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{4}{(2x-3)^2}\frac{dy}{dt}$$

با جایگذاری در معادله، جواب بدست می آید.

۳۰- با تغییر متغیر $z=\sqrt{x}$، معادله $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}y=0$، به چه معادله‌ای تبدیل می شود؟ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$

حل:

اگر $z=\sqrt{x}\Rightarrow y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=y'\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{y'(z)}{2z}$

$$y''(x)\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(z)}{2z}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{y'(z)}{2z}\right)\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x}}\left(\frac{y''(z)}{z}-\frac{y'(z)}{z^2}\right)=\frac{1}{4z}\left(\frac{y''(z)}{z}-\frac{y'(z)}{z^2}\right)$$

با جایگذاری در معادله و ساده کردن خواهیم داشت:

$zy''-2y'+zy=0$.

۳۱- با تغییر متغیر $z=x^2$، معادله دیفرانسیل $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$ به کدام معادله تبدیل می شود؟.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(2x\frac{dy}{dz}\right)=2\frac{dy}{dz}+2x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)=$$

$$2\frac{dy}{dz}+2x\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=2\frac{dy}{dz}+4x^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$z^2y''+zy'+(z^2-1)y=0$.

۳۲- رونسکین $\{t, t-3, 2t+5\}$ برابر است با:

0(1   2(2   -1(3   5(4

گزینه (1).

$$y_1=t, y_2=t-3, y_3=2t+5$$

$$w=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

۱- یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $x^3y''+x^2y'+xy=1$ کدام است؟

الف) $y_p=\frac{1}{x^2}$ ب) $y_p=\frac{1}{2x}$ ج) $y_p=-\frac{1}{x^2}$ د) $y_p=-\frac{1}{2x}$

۲- معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y=Ax+Bx^2$ کدام است؟

الف) $x^2y''+2xy'+2y=0$ ب) $x^2y''+2xy'-2y=0$

ج) $x^2y''-2xy'-2y=0$ د) $x^2y''-2xy'+2y=0$

۳- با تعویض متغیر $y=e^{\int u(x)dx}$ معادله دیفرانسیل $x^2yy''=(y-xy')^2$ به چه صورت در می‌آید؟

الف) $x^2u'=1-xu$ ب) $x^2u'=1+xu$

ج) $x^2u'=1-2xu$ د) $x^2u'=1+2xu$

۴- اگر $y_1=x$ جوابی از معادله $x^2y''+xy-y=0$ باشد جواب عمومی آن کدام است؟

الف) $y=c_1x+c_2x^2$ ب) $y=c_1x+c_2x^{-1}$

ج) $y=c_1x+c_2x\mathrm{Ln}x$ د) $y=c_1x+c_2x^{-2}$

۵- جواب عمومی معادله $y''-9y'+20y=0$ چیست؟

الف) $y=e^{4x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x1$ ب) $y=ce^{4x}+c2xe^{4x}$

ج) $y=c_1x^4+c_2x^{-5}$ د) $y=c/e^{4x}+c_2e^{5x}$

۶- جواب خصوصی معادله $y''+10y'+25y=14e^{-5x}$ کدام است؟

الف) $y_p=6xe^{-5x}$ ب) $y_p=7xe^{-5x}$

ج) $y_p=7x^2e^{-5x}$ د) $y_p=6x^2e^{-5x}$

۷- کدام گزینه یک جواب خاص از معادله دیفرانسیل $y''+2y'+y=e^{-x}\log x$ کدام است؟

الف) $y_p=\frac{x^2}{4e^x}(2\mathrm{leg}x-3)$ ب) $y_p=\frac{3x^2}{4e^x}(2\mathrm{leg}x-1)$

ج) $y_p=\frac{x^2}{3e^x}(\mathrm{leg}x+4)$ د) $y_p=\frac{2x^2}{3e^x}(\mathrm{leg}x+2)$

الف) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$　　ب) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

ج) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$　　د) $y=c_1\cosh 2x+c2\sinh 2x$

۹- جواب خصوصی معادله $y''+2y=3+4\sin 2x$ **کدام است؟**

الف) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$　　ب) $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$

ج) $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$　　د) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$

۱۰- جواب خصوصی معادله $y''+y'+4y=2\sinh x$ **کدام است؟**

الف) $y_p=\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{6}e^{-x}$　　ب) $y_p=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}e^{-x}$

ج) $y_p=\frac{1}{6}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}$　　د) $y_p=\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{4}e^{-x}$

۱۱- جواب خصوصی معادله $y''+2y'+y=4e^{-x}\text{Lnx}$ **در** $x=1$ **کدام است؟**

الف) $-3e^{-1}$　　ب) $2e^{-1}$　　ج) $3e^{-1}$　　د) $-2e^{-1}$

۱۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y''+3xy'+10y=0$ **کدام است؟**

الف) $y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\text{Lnx}$

ب) $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-3}$

ج) $y=x^{-1}[c_1\cos(3\text{Lnx})+c_2\sin(3\text{Lnx})]$

د) $y=x^{-1}[c_1\cos(2\text{Lnx})+c_2\sin(2\text{Lnx})]$

۱۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^3y'''+xy'-y=0$ **کدام است؟**

الف) $y=c_1x+c_2x\text{Lnx}+c_3x\text{Lnx}^2$　　ب) $y=c_1+c_2x^2+c_3x^2\text{Lnx}$

ج) $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$　　د) $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^2\text{Lnx}$

۱۴- کدام گزینه جوابی از معادله دیفرانسیل $(x+2)^2y''-(x+2)y'+y=0$ **می‌باشد.**

الف) $\text{Ln}(x+2)$　　ب) $(x+2)^2$

ج) $(n+2)\text{Ln}(x+2)$　　د) $\text{Ln}^2(x+2)$

۱۵– جواب معادله [illegible] وقتی [illegible] برابر است با:

الف) صفر　　ب) 1　　ج) e　　د) ∞

۱۶– یک جواب خصوصی معادله $(D^2-1)y=5e^x\sin x$ کدام است؟

الف) $y_p=e^x(\sin x-2\cos x)$　　ب) $y_p=-e^x(\cos x+2\sin x)$

ج) $y_p=e^x(\cos x+2\sin x)$　　د) $y_p=-e^x(\sin x+2\cos x)$

۱۷– ضریب x^3 در جواب معادله دیفرانسیل $y''=x-y,\ y(e)=0$ به شکل کدام است؟

الف) صفر　　ب) $-\frac{1}{2}$　　ج) $\frac{1}{2^4}$　　د) $-\frac{1}{6}$

۱۸– در معادله دیفرانسیل $x^2(x^2-1)^2y''-x(1-x)y'+2y=0$ دسته‌بندی نقاط غیر عادی چگونه است؟

الف) $x=0$ و $x=1$ منظم و $x=-1$ نامنظم

ب) $x=0$ و $x=\pm1$ منظم و $x=\pm1$ نامنظم

ج) $x=1$ و $x=-1$ منظم و $x=0$ نامنظم

د) $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ نامنظم

۱۹– نقطه‌ی $x=0$ برای کدام یک از معادلات زیر یک نقطه غیر عادی منظم است؟

الف) $y''+(\sin x)=y=0$　　ب) $x^3y''+(\sin x)y=0$

ج) $xy''+(\sin x)y=0$　　د) $x^4y''+(\sin x)y=0$

۲۰– اگر سری توانی $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m}$ جوابی از معادله $xy''-2y'+y=0$ و آنگاه کدام رابطه بازگشـــتی برقـــرار است؟

الف) $a_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+4)}$　　ب) $a_{n+1}=\frac{-a_n}{(n+2)(n+3)}$

ج) $a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+2)(n+3)}$　　د) $a_{n+1}=\frac{-a_n}{(n+1)(n+4)}$

۱- گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به اینکه مجموعه سه جمله چپ برابر مقدار ثابت 1 است می‌توان نتیجه گرفت که در یکی از حالت‌های ممکن است که هـر کدام از سه جمله برابر با مقدار ثابت شده باشد و داریم:

$$xy=A, x^2y=B, x^3y''=c$$

$$xy=A \Rightarrow y=\frac{A}{x}, y'=-\frac{A}{x^2}, y''=\frac{2A}{x^3}$$

و در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم؛

$$x^3(\frac{2A}{x^3})+x^2(-\frac{A}{x^2})+x(\frac{A}{x})=1 \rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{2x}$$

۲- گزینه (۴) صحیح است.

$$\begin{cases} y=Ax+Bx^2 \\ y'=A+2Bx \end{cases}$$

$$y''=2B \Rightarrow B=\frac{y''}{2}$$

$$y'=A+2(\frac{y''}{2})x=A+xy'' \Rightarrow A=y'-xy'$$

و در معادله اول قرار می‌دهیم؛

$$y=(y'-xy'')x+\frac{y''}{2}x^2$$

$$\Rightarrow x^2y''-2xy'+2y=0$$

۳- گزینه (۳) صحیح است.

$$\begin{cases} y'=ue^{\int u(x)dx}=uy \\ y''=u'y+uy'=u'y+u^2y \end{cases}$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^2y(u'y+u^2y)=(y-xuy)^2$$

$$u'x^2+u^2x^2=(1-xu)^2$$

$$x^2u'=1-2xu$$

فرض کنیم جواب دیگر $y_2 = uy_1$ است در این صورت

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

$$u = \int \frac{1}{y_1^2}\exp(-\int p dx)dx$$

$$u = \int \frac{1}{x^2}\exp(-\int \frac{1}{x}dx)dx = \int \frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}x^{-1} \Rightarrow y = c_1x + c_2x^{-1}$$

۵- گزینه (۴) صحیح است.

مشخصه معادله به صورت $m^2 - 9m + 20 = 0$ است و چون $(m-4)(m-5) = 0$ لذا $m_1 = 4$ و $m_2 = 5$ و جواب‌های معادله مشخصه حقیقی اند بنابراین:

$$y = c_1e^{4x} + c_2e^{5x}$$

۶- گزینه (۳) صحیح است.

معادله مشخصه را برای معادله همگن تشکیل می‌دهیم؛

$$m^2 + 10m + 25 = 0$$

$$(m+5)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جواب خصوصی}} y_p = Ax^2e^{-5x}$$

و با جایگذاری در معادله داریم؛

$$2Ae^{-5x} = 14e^{-5x} \rightarrow A = 7$$

۷- گزینه (۱) صحیح است.

جواب معادله مشخصه همگن داریم؛

$$m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$w(y_1, y_2) = e^{-2x}$$

$$\begin{cases} u_1' = -\dfrac{y_2R}{w} = -\dfrac{xe^{-2x}\operatorname{leg}x}{e^{-2x}} = -x\operatorname{leg}x \\ u_1 = -\dfrac{x^2}{2}\operatorname{leg}x + \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$u_2=\int \frac{y_1R}{w}dx=x\operatorname{leg}x-x$$

$$y_p=u_1g_1+u_2y_2$$

$$=-\frac{x^2 2}{2}e^{-x}\operatorname{leg}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}e^{-x}+x^2e^{-x}\operatorname{leg}x-x^2e^{-x}$$

$$y_p=\frac{1}{2}x^2e^{-x}\operatorname{leg}-\frac{3}{4}x^2e^{-x}=\frac{x^2}{4e^x}(2\log x-3)$$

۸- گزینه (۴) صحیح است.

معادله مشخصه $m^2-4=0$ و دارای $m_1=2$, $m_2=-2$ بنابراین جواب عمومی به شکل $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$ است.

$$A=\frac{c_1+c_2}{2},B=\frac{c_1-c_2}{2}$$

$$y=c_1\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+c_2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=c_1\cosh 2x+c_2\sinh 2x$$

۹- گزینه (۳) صحیح است.

$$m^2+2m=0\rightarrow\begin{cases}m=0\\m=-2\end{cases}\Rightarrow y=c_1y_1+c_2y_2=c_1+c_2e^{-2x}$$

به دلیل وجود جواب $m=0$ در معادله مشخصه جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_p=A_0x^1+\left(a_1\cos 2x+A_2\sin 2x\right)$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$A_0=\frac{3}{2},A_1=-\frac{1}{2},A_2=-\frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه (۳) صحیح است.

می دانیم $2\sinh x=2\frac{e^x-e^{-x}}{2}=e^x-e^{-x}$ بنابراین در معادله:

$$y''+y'+4y=e^x-e^{-x}$$

چون معادله مشخصه ریشه حقیقی ندارند لذا:

$$y_p=A_1e^x+A_2e^{-x}$$

در معادله قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$A_1 = -\frac{}{6}\ A_2 = -\frac{-}{4}$$

۱۱- گزینه (۱) صحیح است.

جواب همگن معادله با $m_1 = m_2 = -1$ برابر است با:

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$$

بنابراین $w = e^{-2x}$ و از تغییر پارامترها داریم:

$$y_p = x^2 e^{-x}(2Lnx - 3)\Big|_{x=0} \Rightarrow y_p = -3e^{-1}$$

۱۲- گزینه (۳) صحیح است.

معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$m(m-1) + 3m + 1e = 0$$

$$\rightarrow m^2 + 2m + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 - 30i \\ m = -1 + 3i \end{cases}$$

$$y = x^{-1}\left[\left(c_1 xos(3Lnx)\right) + c_2 \sin(3Lnx)\right]$$

۱۳- گزینه (۱) صحیح است.

$$m(m-1)(m+2) + m - 1 = 0 \rightarrow (m-1)^3 = 0 \rightarrow \underbrace{m = 1}_{\text{مرتبه تکرار در 3}}$$

$$y = c_1 x + c_2 xLnx + c_3 xLn^2 x$$

۱۴- گزینه (۳) صحیح است.

فرض کنیم $t = x + 2 > 0$ در این صورت معادله زیر را داریم:

$$t^2 y'' - ty' = y = 0 \rightarrow m(m-1) - m + 1 = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow \underbrace{(m = 1)}_{\text{مرتبه تکرار در 2}} \rightarrow y = c_1 t^1 + c^2 t^1 Lnt$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1 \Rightarrow y = (x+2)Ln(x+2)$$

۱۵- گزینه (۱) صحیح است.

$$m(m-1) + 5m + 4 = 0$$

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m+2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

و ریشه تکراری از مرتبه 2 داریم:

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} Lnx$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim \frac{}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{}{x^2}$$

۱۶- گزینه (۴) صحیح است.

$$\left(D^2-1\right)y = 5e^x \sin x \rightarrow y_p = \frac{1}{D^2-1} 5e^x \sin x$$

$$= 5e^x \frac{1}{(D+1)^2-1} \sin x = 50^x \frac{1}{D^2+2d} \sin x$$

$$= 5e^x \frac{1}{-1+2D} \sin x = 5e^x \frac{2D+1}{4D^2-1} \sin x = 5e^x \frac{2D+1}{4(-1)-1} \sin x$$

$$= -e^x 0(2D+1)\sin x = -e^x(2\cos x + \sin x)$$

۱۷- گزینه (۴) صحیح است.

$$y''(0) = 0 - 0 = 0$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y''(0) = 1$$

$$y''' = -y'' \Rightarrow y'''(0) = -1$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

۱۸- گزینه (۱) صحیح است.

ابتدا معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)(x+2)^2} y' + \frac{2}{x^2\left(x^2-1\right)} y = 0$$

$$p^{(x)} = \frac{1}{x(x-1)(x+2)^2}, Q^{(x)} = \frac{2}{x^2\left(x^2-1\right)^2}$$

نقاط $x = 0$ و $x = 1$ و $x = -1$ هستند و چون حدهای

$$\lim_{x\to 0}(x-e)p(x), \lim_{x\to 0}(x-0)^2 Q(x)$$

و هم چنین $\lim_{x\to 1}(x-1)p(x), \lim_{x\to 1}(x-1)^2 Q_1(x)$ موجودند بنابراین این نقاط منظم‌اند اما $x = -1$ نامنظم است.

۱۹- گزینه (۲) صحیح است.

در مورد گزینه‌ی 3 می‌توان معادله را به شکل زیر نوشت:

$$y'' + 0y' + \frac{\sin x}{n} y = 0$$

$x = 0$ یــک نقطــه عــادی بــرای ان اســت $\sum_{n=0} \frac{\quad}{(2x+1)!} = \frac{\quad}{x}$ امــا در مــورد گزینــه 2 چــون در معادلــه هــم ارز؛

$y'' + \frac{\sin x}{x^3} y = 0$ هر دو عبارت $\begin{cases} (x-e)p(x) \\ (x-e)^2 Q(x) \end{cases}$ در $x = 0$ تحلیلی هستند لذا $x = 0$ یک نقطه غیر عادی منظم است

توجه کنید که چون $Q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی نیست لذا این نقطه برای معادله غیر عادی است.

۲۰- گزینه (۴) صحیح است.

$x = 0$ یک نقطه منفرد است معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y'' + \frac{1}{x}(-2)y' + \frac{1}{x^2}(x)y = 0 \Rightarrow \begin{cases} G(x) = -2 \rightarrow p_0 = -2 \\ H(x) = x \Rightarrow q_0 = e \end{cases}$$

معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$m(m-1) - 2m + e = 0$$

$$m_1 = 3, m_2 = 0$$

چون تفاضل ریشه‌ها عددی صحیح است لذا جواب اول متناظر با ریشه‌ی بزرگ تر به دست می‌آید و با قرار دادن جـواب در معادلـه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)na_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0$$

اما ضریب x^{n+3} برابر است با:

$$(n+4)(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$$

در نتیجه:

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+4)}$$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی

تعریف؛ تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی گوییم، اگر $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R>0$ باشد.

قضیه ۱: اگر در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=p_3(x)$ توابع $p_3(x), p_2(x), p_1(x)$ هر سه در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب این معادله در نقطه $x=a$ تحلیل خواهد بود یعنی می‌توان جواب معادله را به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ در نظر گرفت. از آنجا که اکثر معادلاتی که در این مورد مطرح می‌شود به فرم زیر هستند (لژاندر)

$$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0 \qquad (1)$$

که در آن f_3, f_2, f_1 چند جمله‌ای بر حسب x هستند، می‌توان از قضیه زیر استفاده کرد.

تعریف: در معادله دیفرانسیل (1) نقطه x=a را یک نقطه معمولی گوییم اگر $f_1(a)\neq 0$ باشد، در غیر این صورت نقطه x=a را یک نقطه منفرد می‌نامیم.

قضیه ۲: اگر x=a یک نقطه معمولی معادله دیفرانسیل (1) باشد، آنگاه معادله دارای جوابی به فرم سری توانی بر حسب توان‌های x-a خواهد بود و جواب عمومی را به فرم:

(2) (یک سری توان بر حسب توان‌های x-a) $+\ C^*$ (یک سری توانی بر حسب توان‌های $x-a$) $y=c$

خواهیم داشت و دو سری مستقل خطی بوده و هر دو در یک ناحیه اطراف a همگرا خواهند بود به علاوه شعاع همگرایی هر یک از سری‌ها حداقل برابر مینیمم شعاع همگرایی $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ و $\frac{f_3(x)}{f_1(x)}$ خواهد بود.

تست: اگر حل سری معادله $(2+x^2)y''+y'+y=0$ حول نقطه $x=1$ محاسبه می‌شود، شعاع همگرایی سری حاصل کدامیک از مقادیر زیر خواهد بود؟

الف) بی نهایت　　ب) 2　　ج) $\sqrt{3}$　　د) 1

حل: گزینه (3) صحیح است.

$f_1(1)\neq 0$ $x=1$ یک نقطه معمولی باشد لذا معادله دارای جواب به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ می‌باشد، ضریب $(x-1)^n$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$n^2a_n+(2n+1)(n+1)a_{n+1}+3(n+1)(n+2)a_{n+2}=0$$

طرفین را در n^2a_{n+10} تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{(2n+1)(n+1\_}{n^2}+\frac{3(n+1)(n+2)}{n^2}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=0$$

$$R+2+\frac{3}{R}=0\Rightarrow R^2+2R+3=0$$

$$R=-1\pm i\sqrt{2}\Rightarrow |R|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'-y=x^2$ را به دست آورید به طوری که $y(0)=y_0$.

فرض می‌کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ از آنجا $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na^nx^{n-1}$ بنابراین:

$$y'-x^2-y=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=(a_1-a_0)+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2-1)x^2+\dots+(na_n-a_{n-1})x^{n-1}+\dots$$

ضرایب همه جملات صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$\dots,\ 4a3-a_3=0, 3a_3-a_2-1=0, 2a_2-a_1=0, a_1-a_0=0$

از آنجا $na_n-a_{n-1}=0$

$$a_4=\frac{1}{4}a_3=\frac{1}{12}+\frac{a_0}{24}, a_3=\frac{1}{3}+\frac{a_2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{a_0}{6}, a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{2}, a_1=a_0$$

به طور کلی برای $n\geq 4$، $a_n=\frac{1}{n}a_n$ یا

$$a_n=\frac{2}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n}.\frac{1}{n-1}a_{n-2}=\frac{1}{n}.\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}a_{n-3}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots 4}a_3=\frac{1}{n!}\times 6_{a_3}=\frac{1}{n!}(a_0+2)$$

$$y=a_0+a_0x+\frac{a_0}{2}x^2+\frac{1}{6}(a_0+2)x^3+000+\frac{1}{n!}(a_0+2)x^n+\dots$$

چون $y(0)=y_0$ سپس نتیجه می‌گردد $a_0=y_0$ پس:

$$y=(y_0+2)(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots)-x^2-2x-2$$

$$y=(y_0+2)e^x-x^2-x-2$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'=x^2-4x+y+1$ را حل کنید به طوری که $y(2)=3$

حل: قرار می‌دهیم $x=t+2$ داریم $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$ با گذاردن مقادیر $x, \frac{dy}{dx}$ در معادله به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dt}=(t+2)^2-4(t+2)+y+1$$

یا $\frac{dy}{dt}=t^2+y-3$ که در این معادله به ازای $t=0$ و $y=3$ است، قرار می‌دهیم:

$$y=3+\sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n \Rightarrow y^1=\sum_{n=1}^{\infty}na_n t^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dt}-y-t^2+3\sum_{n=1}^{\infty}na_n t^{n-1}-3-\sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n-t^2+3=0$$

$$a_1+(2a_2-a_1)t+(3a_3-a_2-1)t^2+(4a_4-a_3)t^3+\ldots+$$ یا

$$+(na_n-a_{n-1})t^{n-1}+\ldots$$

هر یک از ضرایب جملات را صفر قرار می‌دهیم و به دست می‌آید:

یا

$$a_4=\frac{1}{4}a_3=\frac{1}{13},a_3=\frac{1}{3},a_2=\frac{a_1}{2}=0,a_1=0$$

و به طور کلی $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}$ از آنجا؛

$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n}.\frac{1}{n-1}a_{n-2}=\ldots=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots4}a_3=\frac{1}{n!}\times6\times\frac{1}{3}=\frac{2}{n!}(n\geq3)$$

بنابراین

و سرانجام؛

$$y=3+\frac{2}{3!}(x-2)^3+\frac{2}{4!}(\alpha-2)^4+\ldots+\frac{2}{n!}(x-2)^n+\ldots$$

مثال؛ معادله دیفرانسیل $y'=\frac{2x-y}{1-x}$ را حل کنید در صورتی که $y(0)=y_0$؛

جواب را به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ در نظر می‌گیریم از آنجا داریم که $y'=\sum na_n x^{n-1}$ و چون $y(0)=y_0$ پس $a_0=y_0$ در نتیجه با جایگذاری در معادله به دست می‌آید:

$$(1-x)y'+y-2x=(1-x)\sum na_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-2x=0$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n-2x=0$$

$$\Rightarrow (a_0 - 2n) + \sum n a_n x^{n-1} + \sum (1-n) a_n = 0$$

$$(y_0 - 2x) + a_1 + 2a_2 x - a_2 x^2 + 3a_3 x^2 + \ldots + (1-n) a_n x^n + (n+1) a_{n+1} x^n + \ldots = 0$$

که پس از خلاصه کردن به صورت زیر در می‌آید.

$$(a_1 + y_0) + (2a_2 - 2)x + (3a_3 - a_2)x^2 + (4a_4 - 2a_3)x^3 + \ldots +$$

$$+ [(n-1)a_{n+1} - (n-1)a_n] x^n + \ldots = 0$$

هر یک از جملات این سری را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$\ldots,\ 4a_4 - 2a_3 = 0, 3a_3 - a_2 = 0, 2a_2 - 2 = 0, a_1 + y_0 = 0$$

$$(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0$$

از آنجا داریم؛

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n, a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3}$$

$$, a_2 = 1, a_1 = -y_0$$

و به طور کلی

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a_{n-2} =$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} a_{n-3} = \ldots = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\ldots 2\times 1}{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 4\times 3} a_2 \frac{2}{n(n-1)} a_2$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \qquad 0 \geq 2$$

بنابراین داریم؛

$$y = y_0 - y_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n = y_0(1-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n$$

ازطرفی

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n n^n}\right|=|x|\lim\frac{n-1}{n+1}=|x|$$

پس سری برای $(x\mid x)$ همگرا ست.

تست: هرگاه $y=(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n^n$ جوابی به صورت سری توانی برای مسئله $y''-2xy''+ny=0$ باشد $y'(e)=0, y(0)=12$ آنگاه مقدار ضریب a_2 عبارت است از:

الف) 0/1 ب) -48 ج) -24 د) 72

حل: گزینه (2) صحیح است؛

$$y=\sum a_n x^n, y'\sum na_n x^{n-1}$$

$$, y''=\sum n(n-1)a_n x^{n-2}$$

و با جایگذاری دو معادله داریم؛

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}na_n n^n+8\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$2\times1\times a_2+8a_0=0\Rightarrow a_2=-4a_0$ (ضریب k^0)

$a_0=y(0)=12\Rightarrow a_2=-4\times12=-48$

تست؛ هر گاه $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ جوابی به صورت سری توانی برای $x''+xy=0$ با $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ باشد آنگاه ضریب a_3 برابر است با:

الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{1}{6}$ ج) -1 د) هیچکدام

حل: جواب معادله به فرم زیر می‌باشد:

$$y=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y''(0)}{3!}x^3$$

$$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}, a_2=\frac{y''(0)}{2!}$$

$y''+xy'=0\Rightarrow y'(0)+oxy(0)=0$

$y''+xy=0\Rightarrow y'''+y+xy'=0\Rightarrow y'''(0)+y(0)+0xy'(0)=0$

گزینه (2) صحیح است.

$$y'''(0)+1=0\Rightarrow y'''(0)=-1\Rightarrow a_3=-\frac{1}{6}$$

تست: کدام یک از بسط‌های توانی زیر، یکی از حل‌های معادله دیفرانسیل $y''+x^4y=0$ می‌باشد.

$(a_0=1, a_1=0)$

الف) $y(x)=1-\frac{x^2}{30}+\frac{x^{13}}{1360}-\dots$ ب) $y(x)=1-\frac{x^5}{30}+\frac{x^{12}}{3960}-\dots$

ج) $y(x)=1-\frac{x^4}{30}+\frac{x^{10}}{3960}-\dots$ د) $y(x)=1-\frac{x^6}{30}+\frac{x^{12}}{3960}-\dots$

حل: گزینه 4 صحیح است.

حل؛ $f_1(0)\neq 0$ و $x=0$ یک نقطه معمولی می‌باشد بنابراین معادله دارای جواب به فرم $y=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$ با جایگذاری y و y'' در معادله داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+4}=0$$

$2a_2=0\Rightarrow a_2=0$ (ضریب x^0)

$3\times2\times a_3=0\Rightarrow a_3=0$ (ضریب k^1)

$5\times4\times a5=0\Rightarrow a_5=0$ (ضریب n^3)

$6\times5\times a_6+a_0=0$ (ضریب x^4)

$7\times6\times a+a_1=0\Rightarrow a_7=-\frac{a_1}{42}$ (ضریب x^5)

$a_{n+6}=-\frac{a_n}{(n+6)(n+5)}$ (رابطه بازگشتی ضریب x^{n+4})

$$a_n=a_9=a_{10}=a_{11}=0\,,\qquad a_{12}=-\frac{a_2}{12\times11}=\frac{a_0}{3960}$$

معادله لژاندر، چند جمله‌ای لژاندر

معادله دیفرانسیل زیر، به معادله لژاندر معروف است.

$$(1-x^2)y''-2xy'+(m(m+1))y=0 \qquad (3)$$

معادله (3) در شرایط متغیر (2) از بخش قبل صدق می‌کند، $x=0$ یک نقطه معمولی می‌باشد. بنابراین معادله دارای جواب به نرم $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ می‌باشد با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله (3) و مساوی قرار دادن ضرایب xهای هم توان به دست می‌آوریم.

(4) رابطه بازگشتی

$$C_{n+2} = -\frac{\quad}{(n+2)(n+1)} c_n , n \geq 0$$

و جواب عمومی به فرم زیر است.

$$y = c_0\left(1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4 - + \ldots\right) \qquad (5)$$
$$+ c_1\left(x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 - + \ldots\right)$$

با توجه به رابطه بازگشتی، شعاع همگرایی برابر 1 و فاصله همگرایی $[-1,1]$ می‌باشد.

$$\frac{1}{R} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty}\left|\frac{c_n + 2}{c_n}\right| = \operatorname{Lim}_{n\to\infty}\left|\frac{(m-1)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)}\right| = 1$$

چنان که مشاهده می‌شود (a) به فرم $y = c_0 R_m(x) + c_1 Sm(x)$ می‌باشد، که m زوج باشد، سری $R_m(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه m خواهد بود که فقط شامل توان‌های زوج تا x^m می‌باشد و $Sm(x)$ به صورت یک سری می‌باشد و هنگامی که m فرد باشد، سری $S_m(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه m و شامل توان‌های فرد تا x^m می‌باشد و $R_m(x)$ به صورت یک سری است.

بنابراین برای هر عدد درست نامنفی m، $R_m(x)$ یا $S_m(x)$ (نه هر دو) یک چند جمله‌ای از درجه n می‌باشد، این چند جمله‌ای‌ها را که در مقادیر ثابتی ضرب شده اند چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌نامند،

رابطه بازگشتی (4) را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$c_n = \frac{-(n+2)(n+1)}{(m-n)(m+n+1)} c_{n+2} \quad , \qquad n \leq m-2 \qquad (6)$$

سپس تمام ضرائب مخالف صفر را بر حسب c_m به دست می‌آوریم. در این صورت ضریب c_m ثابت دلخواه می‌باشد و مرسوم است که $C_0 = 1$ انتخاب می‌شود و

$$c_m = \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \qquad (7)$$

جواب چند جمله‌ای به دست آمده از معادله لژاندر را چند جمله‌ای لژاندر از درجه m می‌نامیم و آن را با $p_m(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$pm(x) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!}$$

با توجه به فرمول قبل داریم

$$p_0 = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

چند جمله‌ای لژاندر را می‌توان با استفاده از روابط فرمول‌هایی که ذیلاً معرفی می‌شوند محاسبه نمود.

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dn^n}\left(x^2-1\right)^n \qquad (8)$$

ب) تابع مولد چند جمله‌ای لژاندر

چند جمله‌ای لژاندر $p_n(x)$، ضرائب t^n در بسط مک لورن $\left(1-2nt+t^2\right)^{-1/2}$ می‌باشند، یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)t^n$$

ب) روابط بازگشتی

$$p_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xp_n(x)-\frac{n}{n+1}p_{n-1}(x) \qquad ,n\geq 1 \qquad (9)$$

$$p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x),\ n\geq 1 \qquad (10)$$

$$(x^2-1)pn'=nxp_n(x)-np_{n-1}(x),n\geq 1 \qquad (11)$$

$$np_n(x)+p'_{n-1}(x)-xp'_n(x)=0 \qquad , \qquad n\geq 1 \qquad (12)$$

$$p'_{n+1}(x)=xp'_n(x)+(n+1)p_n(x) \qquad , \qquad n\geq 1 \qquad (13)$$

روابط مهم

الف)

$$p_n(1)=1$$

ب)

$$p_n(-1)=(-1)^n$$

ج)

$$p_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n} \text{ و } p_{2n-1}(0)=0$$

د)

$$p_n(-x)=(-1)^n pn(x)$$

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)du = 0, m \neq n$$

و)
$$\int_{-1}^{1} (p_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

قضیه: اگر تابع f در شرایط دیرکله (تابع پیوسته قطعه‌ای و در نقاط انفصال مشتق چپ و مشتق راست موجود باشد) آنگاه در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$، در فاصله $-1<x<1$ داریم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n pn(x)$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)d_x$$

و در هر نقطه ناپیوستگی سری بالا، به $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ همگرا می‌باشد.

تست: اگر $p_0(x)=1$ **و** $p_1(x) = x$ **و** $-1 \le x \le 1$ **باشد و** $p_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ **فرض شود، مقــادیر** α, β, γ **چگونه باشند که** $p_x(x), p_1(x), p_0(x)$ **یک مجموع توابع مشاهده باشد.**

الف) $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 0, -\frac{1}{2}$

ب) $\alpha = \frac{5}{2}, \beta = \frac{3}{2}, \gamma = 0$

ج) $\alpha = \frac{35}{8}, \beta = \frac{-30}{8}, \gamma = \frac{3}{8}$

د) $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{5}{2}, \gamma = \frac{3}{8}$

حل؛ واضح است باید جواب (1) درست باشد زیرا $p_\alpha(x)$ یک چند جمله‌ای (زوج) لژاندر از درجه 2 می‌باشد و چند جمله‌ای زوج است، لذا باید $\beta = 0$ باشد.

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_0(x)dx = 0, \int_{-1}^{1} p_2(x)p_1(x)d_x = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+\beta x+\gamma)dx = \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + \gamma x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\alpha}{3} + 2\gamma = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)xdx = \frac{\alpha}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{\gamma}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

روش توسعه یافته روی توانی، روش فروبنیوس

تعریف؛ در معادله دیفرانسیل

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0 \qquad (9)$$

که در آن f_3, f_2, f_1 سه چند جمله‌ای می‌باشند، نقطه $x=a$ را یک نقطه منفرد می‌گوئیم اگر $f_1(a) = 0$ باشد و چنانچه طرفین (9) را بر ضریب y'' تقسیم کنیم و آن را به فرم زیر بنویسیم:

$$y'' + \frac{g(x)}{x-a}y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2}y = 0 \qquad (10)$$

و $h(x), g(x)$ هر دو در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند در این صورت نقطه $x=a$ را یک نقطه منفرد منظم می‌نامیم.

قضیه: اگر در معادله دیفرانسیل (9) نقطه $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم باشد آنگاه معادله حداقل دارای یک جواب فرد زیر می‌باشد:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n , c_0 \neq 0 \qquad (11)$$

روش حل معادله: اگر $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله باشد و y'', y', y را در معادله جایگذاری کرده و سپس با مساوی قرار دادن ضرایب xهای هم توان، مقدار r و C_nها را محاسبه می‌کنیم با مساوی صفر قرار دادن ضریب کمترین توان n، معادله شاخصی به صورت زیر به دست می‌آید،

$$r^2 + (g(e) - 1)r + h(0) = 0 \qquad (12)$$

با توجه به این معادله شاخص یک معادله درجه دوم با ضرائب حقیقی است سه حالت ممکن است رخ دهد حالت اول معادله شاخصی دارای دو ریشه متمایز $r_1 \neq r_2$ و تفاضل آنها عدد صحیح نباشد در این صورت معادله دارای دو جواب به صورت زیر می‌باشد؛

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} cnx^n \qquad , \qquad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

و جواب عمومی به فرم $y = Ay_1 + By_2$ بیان می‌شود.

حالت دوم؛ معادله شاخصی ریشه مضاعف r داشته باشد در این صورت معادله دارای دو جواب به فرم $y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n , y_2 = y_1 Lnx + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد و جواب عمومی به فرم $y = Ay_1 + By_2$ است.

حالت سوم معادله شاخصی دارای دو ریشه متمایز $r_1 > r_2$ و تفاضل آنها عدد صحیح است در این حالت دو جواب به فرم زیر بیان می‌شود.

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad , \qquad y_2 = ky_1 Lnx + x^{r2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مقدار k در ضمن در ضمن حل مسئله محاسبه می‌شود و جواب عمومی به فرم $y = Ay_1 + By_2$ می‌باشد.

تست: معادله شاخص معادله دیفرانسیل $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$ دارای؛

الف) ریشه مضاعف صفر است.

ب) دارای ریشه‌های 1 و 1- است.

ج) ریشه‌های 0 و $\frac{1}{2}$ است.

د) ریشه‌های 1- و $\frac{3}{5}$ است.

حل: گزینه (1) صحیح است؛ چون $f_1(0) = 0$ و $g(n) = \frac{3x-1}{x-1}$ و $h(x) = \frac{x}{n-1}$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی می‌باشند سپس داریم؛ ریشه مضاعف $0 = 0 - r(1-1) r^2 \Leftarrow$ فرمول 12

تست: یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$ به فرم سری توانی عبارت است از:

الف) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$

ب) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(x+1)!}$

ج) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

د) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)}$

حل؛ $k=0$ یک نقطه منفرد منظم لذا معادله حداقل دارای یک جواب به خود $y = x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ می‌باشد، $g(x) = -1$ و $h(x) = 1-x$ با توجه به فرمول‌های 12 ریشه مضاعف $r^2(-1-1)r+1=0 \Rightarrow r=1$

$$y = x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nk^{n+1}$$

$$y^1 = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+1)x^n \quad , \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+1)nx^{n-1}$$

با جایگذاری y'', y', y در معادله داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+1)nx^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} = 0$$

ضریب x^2 $\quad a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = a_0$

گزینه (1) صحیح است.

ضریب x^3 $\quad 4a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{\alpha^2}$

تست: ریشه‌های معادله شاخص معادله زیر در نزدیکی نقطه $x = 0$ عبارت است از:

$$2n(1+x)y'' + (1+6x)y' + 2y = 0$$

الف) -1 و 0

ب) 0 و $\frac{1}{2}$

ج) 1 و 2

د) $\sqrt{2}$ و -1

حل؛ $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است زیرا $g(x) = \frac{1+x}{2(1+x)}$ و $h(x) = \frac{x}{x+1}$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی هستند و با توجه به فرمول 12 داریم:

$$r^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)r + 0 = 0 \Rightarrow y = 0, \frac{1}{2}$$

خواهد بود.

الف) $y_2(x)=\sqrt{x}\,y_1(x)$

ب) $y_2(x)=y_1(x)Lax+\sum_{m=}^{\infty}c_m k^m$

ج) $y_2(x)=3xy_1(x)$

د) $y_2(x)=ax^3+bx+\sum_{m=0}^{\infty}c_m k^m$

حل؛ گزینه (2) صحیح است زیرا $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است، زیرا $f_1(0)=0$ و $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-1}$ و $h(x)=\dfrac{x}{x-1}$ هر دو در $x=0$ تحلیلی می‌باشند با استفاده از فرمول (12) ریشه‌های معادله شاخص را به دست می‌آوریم:

$$r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0\Rightarrow r^2=0\Rightarrow r=0,0$$

و بنابر حالت دوم و فرمول آن داریم:

$$y_2(n)=y_1(x)L_{nx}+_x^0\sum_{m=1}^{\infty}C_m x^m$$

اگر مجموع از $m=1$ شروع شود.

معادله بسل، توابع بسل نوع اول و نوع دوم

هر معادله دیفرانسیل به فرم

$$x^2y''+xy'+(x^2-u^2)y=0 \qquad (13)$$

که در آن u یک عدد است را یک معادله بسل می‌نامیم. ملاحظه می‌شود که $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد، لذا معادله (13) دارای جوابی به فرم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n k^{n+3} \qquad c_0\neq 0 \qquad (14)$$

می‌باشد، و با جایگذاری y'', y', y در معادله فوق و مساوی قرار دادن ضرائب xهای هم توان، مقدار r و ضرایب c_n را می‌توان محاسبه کرد، از طرفی با توجه به اینکه معادله مشخص را می‌توان از فرمول $r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0$ محاسبه نمود و چون $g(x)=1$ و $h(x)=x^2-u^2$ بنابراین معادله شاخص به فرم زیر می‌باشد.

$$r^2+(1-1)r+u^2=0\Rightarrow r_1=u, r_2=-u \qquad (14)$$

با توجه به این ریشه ها، معادله وقتی دارای ریشه مضاعف است که $u=0$ باشد و هنگامی که r یک عدد صحیح باشد، تفاضل

معادله به فرم (14) می‌باشد و اختلاف در جواب دوم است. حال اگر در (14) $r=u$ قرار دهیم و y'', y', y را در (13) جایگذاری و ضرائب xهای هم توان را مساوی صفر قرار دهیم، جواب اول به فرم زیر به دست می‌آید.

(15) رابطه بازگشتی
$$C_{n+2}=\frac{-C_n}{(n+2)(n+2+2u)} \qquad ,n=0,1,2,...$$

$$y_1(x)=C_0x^u(1-\frac{x^2}{2^2(1+x)}+\frac{x^4}{2^4\times 2!(1+u)(2+u)}-+....) \tag{16}$$

چون C_0 پارامتر اختیاری ای، موسوم است که

$$C_0=\frac{1}{2^u\Gamma(u+1)}$$

انتخاب شود، این انتخاب داریم

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{k+u}xk!\Gamma(u+k+1)}$$

با جایگذاری این ضرائب در (14) یک جواب خصوصی معادله بسل به دست آید این جواب را $J_u(x)$ نمایش می‌دهیم و معروف به تابع بسل نوع اول از مرتبه u است و به ازای تمام مقادیر $x\in R$ همگرا است و $J_u(x)$ با فرمول زیر بیان می‌شود.

$$J_u(x)=x^u\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-)^m}{2^{2m+u}m!\Gamma(u+m+1)}x^{2m} \tag{17}$$

در زیر بخشی از روابط مهم بین توابع بسل نوع اول را بیان می‌کنیم.

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_x(x), n\in| N \tag{18}$$

$$\left(x^uJ_u(x)\right)'=x^uJ_{u-1}(x) \tag{19}$$

$$(x^{-u}J_u(x))'=-x^{-u}J_{u+1}(x) \tag{20}$$

$$J_{u-1}(x)+J_{u+1}(x)=\frac{2u}{x}J_u(x) \tag{21}$$

$$J_{u-1}(x)-J_{u+1}(x)=2y'_u(x) \tag{22}$$

$$\int x^{uj}J_{u-1}(x)d_n=x^uJ_u(x)+c \tag{23}$$

$$\int x^{-u}J_{u+1}(x)dx=-x^{-u}J_u(x)+C \tag{24}$$

$$\int J_{u+1}(x)d_x=\int J_{u-1}(x)dx-2J_u(x) \tag{25}$$

تابع بسل نوع دوم؛ همان طور که بیان شد، اگر $u=0$ باشد معادله شاخص دارای ریشه مضاعف می‌باشد و معادله دارای یک جواب به فرم $J_0(x)$ می‌باشد، برای تعیین جواب دوم، آن را به فرم $y_2=J_0(x/u/n)$ در نظر می‌گیریم ولی در عمل بهتر

$$y_2(x)=J_0(x)Lnx+\sum_{m=1}^{\infty}a_m n^m \qquad (26)$$

با جایگذاری y_2 و مشتقاتش در معادله $xy''+y'+xy=0$، ضرایب a_n را تعیین می‌کنیم، حال اگر به جای جواب دوم، ترکیب خطی از جواب‌های اول و دوم به صورت $a(y_2(x)+bj_0(x))$ در نظر می‌گیریم با $a=\frac{2}{16}$ و $b=\gamma-Ln2$ که γ ثابت اولد می‌باشد و این جواب را با $y_0(x)$ و جواب معادله دوم از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$y_2(x)=kJ_n(x)Lnx+x^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m \qquad (27)$$

با جایگذاری y_2 و مشتقاتش در معادله $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ و ضرائب a_n و k را پیدا می‌کنی، حال به جای جواب دوم ترکیب خطی از جواب‌های اول و دوم به صورت $a(y_2(x)+by_n(x))$ را در نظر می‌گیریم، b, a مانند حالت $u=0$ تعریف می‌شوند و جواب را با $y_n(x)$ نمایش می‌دهیم. شکل کلی جواب دوم به ازای تمام مقادیر u به فرم زیر می‌باشد.

$$a)y_n(x)=\frac{1}{\sin u\pi}(J_u\cos u\pi-J_{-u}(x)),u\neq 0,1,2,... \qquad (28)$$

$$b)y_n(x)=\lim_{u\to n}y_u(x), n=0,1,2,...$$

این جواب معادله بسل به تابع دوم از مرتبه u یا تابع نیومن مرتبه u معروف است. توجه؛ روابط بیان شده در مورد تابع نوع اول، بدون تغییر برای $y_n(x)$ نیز برقرار است.

توجه؛ جواب عمومی معادله بسل

$$x^2y''+xy'+(x^2-u^2)y=0$$

به فرم زیر بیان می‌شود.

$$y=AJ_u(x)+By_u(x) \qquad (29)$$

تست: برای توابع بسل نوع اول داریم (n عدد صحیح مثبت، منفی و یا صفر)

الف) $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ **ب)** $\frac{d}{dx}(x^nJ_n(x))=x^nJ_{n-1}(x)$ **در این صورت** $\frac{dJ_n(x)}{dx}$ **برابر است با:**

الف) $\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$ ب) $\frac{1}{2}J_{n-1}(x)-\frac{1}{2}J_{n+1}(x)$

ج) $xj_{n-1}(x)-nJ_n(x)$ د) $nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$

حل؛ با توجه به «ب» داریم

$$nx^{n-1}J_n(x)+x^nJ'_n9x)=x^nJ_{n-1}(x)$$

با استفاده از فرمول (21) داریم:

$$\Rightarrow J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{}{x} J_n(x)$$

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = \frac{1}{2}J_{n-1}(x) - \frac{1}{2}J_{n+1}(x)$$

۱- اگر جواب معادله $x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0$ **برابر** $C_1J_n(x)+C_2{}_{2n}^{y}(x)$ **باشد که** $y_n(x), J_n(x)$ **به ترتیب توابع مدل نوع اول و دوم هستند، در این صورت جواب معادله** $x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-n^2\right)y=0$ **به چه صورت است؟**

الف) $c_1J_n(\lambda x)+c_2y_n(x)$

ب) $c_1J_{n\lambda}(x)+c_2y_{n\lambda}(x)$

ج) $c_1J_n(\lambda x)+c_2y_2(\lambda x)$

د) هیچ کدام

۲- اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}$ **جواب معادله بسل** $x^2y''+xy'+(x^2-u^2)y=0$ **باشد آنگاه مقدار r برابر است با؛**

الف) $u\pm1$

ب) $u,u-1$

ج) $\pm u$

د) $u,u+1$

۳- معادله دیفرانسیل $4x^2y''+4xy'+\left(nx^2-1\right)y=0$ **مفروض است اگر** $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{16}{x}}\sin u$ $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{16}{x}}\cos x$ **باشد جواب عمومی معادله کدام است؟**

الف) $y=A\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+B\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

ب) $y=A\frac{\sin\sqrt{2}x}{x}+B\frac{\cos\sqrt{2}x}{x}$

ج) $y=A\frac{\sin\sqrt{x}}{x}+B\frac{\cos\sqrt{x}}{x}$

د) $y=A\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}+B\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$

۴- اگر $y_1(x)$ **و** $y_2(x)$ **در پاسخ مختلف معادله بسل مرتبه u با پارامتر** λ **باشند** $x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-u^2)y=0$ **داشته باشیم**

$$F(x)=e^{\int(y_1(x)dy_2(x)-y_2(x)dy_1(x))}$$

کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

الف) $F(X)=kx^{\alpha}$

ب) $F(x)=kx$

ج) $F(x)=e^{\lambda x}$

د) $F(x)=\lambda n^{n}$

$$9x^2y'' + 9xy' + 4(9x^4 - 1)y = 0$$

الف) $y = J_3(x^2)$ ب) $y = J_{\frac{1}{3}}(x^2)$

ج) $y = J_3(x)$ د) $y = J_{\frac{1}{3}}$

۶- هر گاه جواب معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - u^2)y = 0$ به صورت زیر باشد

$y = c_1J_u(x) + C_2J_{-u}(x)$ (c_1, c_2 مقادیر ثابت هستند)

آنگاه جواب معادله $y'' + \frac{1}{n}y' + \left(n - \frac{1}{x^2}\right)y = 0$ برابر است با:

الف) $A_1J_1(x) + BJ_{-1}(x)$ ب) $AJ_1(Ax) + BJ_{-1}(nx)$

ج) $AJ_1(\frac{\sqrt{n}}{n}x) + BJ_{-41}(\frac{\sqrt{n}}{n}x)$ د) $AJ_1(\sqrt{8}x) + BJ_{-1}(\sqrt{8}x)$

۷- با توجه به رابطه بازگشتی

$nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$ برای $J_n(x)$ تابع مبدل نوع اول $(n \in , z)$ مقدر انتگرال زیـر چـه قدر است؟

$$\int_0^1 r^2J_1(r)dr$$

الف) $J_2(1)$ ب) $J_0(1)$ ج) $J_1 - J_2(1)$ د) $J_0(1) - J_1(1)$

۸- برای توابع بسل نوع اول داریم

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(x)J = -x^{-k}J_{k+1}(x)]$$

در این صورت $\frac{d}{dx}[J_x(x)]$ برابر است با:

الف) $J_k(x) + kJ_{k+1}(x)$ ب) $\frac{k}{x}J_x(x) + \frac{1}{x}J_{k+1}(x)$

ج) $\frac{k}{x}J_k(x) - J_{k+1}(x)$ د) $J_k(x) - \frac{k}{x}J_{k+1}(x)$

۹- وضعیت نقاط تکین معادله دیفرانسیل [illegible] عبارتست از.

الف) $x=0$ منظم و $x=1$ منظم است.

ب) $n=0$ نامنظم و $x=1$ منظم است.

ج) $x=0$ و $n=1$ هر دو نامنظم‌اند.

د) $x=0$ و $x=1$ هر دو منظم‌اند.

۱۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x>0$ و $2x^2y''+ny'-(x+1)y=0$ کدام یک است؟

الف) $y=c_1x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

ب) $y=c_1x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2L_{an}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

ج) $y=c_1x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_nx^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

د) $y=c_1x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۱۱- در معادله دیفرانسیل زیر نوع نقاط تکین را مشخص کنید.

$$x2(x-1)^3y''+x(k-1)^2y'+y=0$$

الف) $x=0$ و $n=1$ هر دو منظم‌اند.

ب) $x=0$ و $n=1$ هر دو نامنظم‌اند.

ج) $x=0$ نامنظم و $n=1$ منظم است.

د) $x=0$ منظم و $n=1$ نا منظم است.

۱۲- دو جواب مستقل معادله زیر $3xy''+2y'+y=0$ به چه صورتی هستند؟

الف) $y_1=x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=\sum_{a=0}^{\infty}b_nx^n$

ب) $y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=\sum_{a=0}^{\infty}b_nx^n$

ج) $y_1=x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=x^{\frac{1}{3}}\sum_{a=0}^{\infty}b_nx^n$

د) $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=y_1(x)Lnx+\sum_{a=0}^{\infty}b_nx^n$

الف) ریشه‌های صفر و $\frac{5}{3}$ است.

ب) ریشه‌های 1- و $\frac{5}{3}$ است.

ج) ریشه مضاعف $\frac{5}{3}$ است.

د) ریشه‌های 1- و $\frac{3}{5}$ است.

۱۴- ریشه‌های معادله شاخصی $x^2y''-3xy'+(x+4)y=0$ در همسایگی $u=0$ عبارت است از:

الف) 4 و 0 ب) 2 و 0 ج) 2 و 2 د) 2 و 2-

۱۵- در جواب مستقل معادله دیفرانسیل زیر به کدام صورت است؟

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0, x>0$$

الف) $y_2(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, y_1(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

ب) $y_2(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

ج) $y_2(x)=y_1(x)\mathrm{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

د) $y_2(x)=y_1(x)\mathrm{Ln}x+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, y_1(x)=\frac{1}{n}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

1- حل؛ با استفاده از تغییر متغیر $z=\lambda x$ داریم

$$z=\lambda x, dz=\lambda dx, y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz},\frac{dz}{du}=\lambda\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\lambda\frac{d^2y}{dz^2},\frac{dz}{dx}=\lambda^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

با جایگذاری دو معادله داریم

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}=\lambda^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

و جواب عمومی با استفاده از فرمول 29 به صورت زیر بیان می‌شود.

$$y = AJ_n(z) + By_n(z) y = AJ_n(+\lambda x) + / by_n(+\lambda x)$$

2- با استفاده از فرمول (14) گزینه (3) صحیح است.

3- حل؛ حل معادله دیفرانسیل به صورت کلی $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-u^2)y=0$ با تغییر متغیر $\lambda x=z$ قابل تبدیل به معادله بسل $z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-u^2)y=0$ می‌باشد چون معادله دیفرانسیل داده شده به صورت $x^2y''+xy'+(2x^2-\frac{1}{4})y=0$ می‌باشد، لذا با تغییر متغیر $\sqrt{2}x=z$ قابل تبدیل به معادله بسل است و جواب عمومی آن به فرم زیر می‌باشد.

$$y(x)=A_1J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)+B_1J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)$$

$$y(x)=A_1\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}x}}\mathrm{Sin}\sqrt{2x}+B_1\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}x}}\cos\sqrt{2}x=A\frac{\mathrm{Sin}\sqrt{2}x}{\sqrt{n}}+B\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$$

4- چون y_1 و y_2 جواب‌های معادله هستند لذا در معادله صدق می‌کند و داریم:

$$\begin{cases}x^2y_1''+xy_1'+(\lambda^2x^2-u^2)y_1=0\\ x^2y_2''+xy_2'+(\lambda^2x^2-u^2)y_2=0\end{cases}$$

معادل اول را در y_2 و معادله دوم را در y_1 ضرب و از یکدیگر کم می‌کنیم و داریم

$$x^2(y_1''y_2-y_2''y_1)+x(y_1'y_2-y_2'y_1)=0$$

$$\frac{y_2''y_1-y_1''y_2}{y_2'y_1-y_1'y_2}=\frac{-1}{x}\Rightarrow L_n|y_1y_2'-y_2y_1'|=-\mathrm{Ln}x+\mathrm{Ln}c$$

$$y_1y_2'-y_2y_1'=\frac{c}{x}\Rightarrow\int y_1y_2'-y_2y_1'=c\mathrm{Ln}x+c$$

$$F(x)=e^{C\ln x+c_1}=kx^c$$

5- گزینه (2) صحیح است، به طور کلی معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+4(x^4-u^2)y=0$ با استفاده از تغییر متغیر

$z=x^2$ قابل تبدیل به معادله بسل $z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-u^2)y=0$ می‌باشد حال اگر طرفین معادله داده شده را بر 9

تقسیم می‌کنیم و داریم $u^2=\frac{1}{9}$, $u=\frac{1}{3}$ بنابراین جواب عمومی معادله به فرم $y=AJ_{\frac{1}{3}}(x^2)+By_{\frac{1}{3}}(x^2)$ می‌باشد.

6- طرفین معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم $x^2y''+xy'+(8x^2-1)y=0$ با توجه به تغییر متغیر $\sqrt{8}x=z$ معادله فوق

به صورت معادله بسل زیر تبدیل می‌شود.

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-1)y=0$$

7- حل با استفاده از فرمول (23) و $u=2$ داریم

$$\int_0^1 r^2J_1(r)dr=r^2J_2(2)\int_0^1 J_2(1)$$

گزینه (1) صحیح است.

8- حل؛

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-k}J_k(x)\right]=-kx^{-k-1}J_k(x)+x^{-k}\frac{d}{dx}\left[J_k(x)\right]$$

$$=-x^{-k}K_{k+1}(x)$$

$$-\frac{k}{x}J_k(x)+\frac{d}{dx}\left[J_k(x)\right]=-J_{k+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[J_k(x)\right]=\frac{k}{x}J_k(x)-J_{k+1}(x)$$

پس گزینه (3) صحیح است.

9- حل؛ گزینه (2) صحیح است، نکته؛ اگر در معادله $p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=0$ نقطه $x=a$ «یک نقطه منفرد (تکین) می‌نامیم اگر $p_1(a)=0$ حال طرفین را بر $p_1(x)$ تقسیم می‌کنیم و معادله را به فرم زیر می‌نویسیم.

$$y''+\frac{g(x)}{x-a}y'+\frac{h(x)}{(x-a)^2}y=0$$

اگر توابع $h(x),g(x)$ هر دو در $x=a$ تحلیلی باشند، آنگاه $x=a$ را یک نقطه منفرد منظم می‌نامیم (تابع $k(x)$ در $x=a$ تحلیلی است، اگر در این نقطه دارای بسط تیلور با شعاع همگرایی بزرگتر از صفر باشد.)

حل: طرفین را بر ضریب y'' تقسیم می‌کنیم.

$$y''+\frac{1}{x^2(1-x)}y'-\frac{1}{x^2(1-x)}y=0$$

$g(x)=\frac{1}{x(1-x)}$ تابع $g(x)$ در $x=0$ تحلیلی نمی‌باشد، لذا $x=0$ یک نقطه تکین نامنظم است ولی توابع

$g(x)=\frac{}{x^2}$ و $h(x)=-\frac{}{x^2}$ هر دو در $x=1$ تحلیلی می‌باشند، لذا $x=1$ یک نقطه تکین منظم می‌باشد.

10- گزینه (3) صحیح است. $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است زیرا

$$y''+\frac{1}{2x}y'-\frac{x+1}{2x^2}y=0$$

و توابع $g(x)=\frac{1}{2},\ h(x)=\frac{-(x+1)}{2}$ در نقطه $x=0$ تحلیلی می‌باشد حال معادله شاخصی را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2(g(e)-1)r+h(0)=0\Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\begin{cases}r_1=1\\ r_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

چون $r_1-r_2=\frac{-3}{2}$ و تفاضل ریشه‌ها عدد صحیح نمی‌باشد پس جواب‌ها به صورت:

$$y_2=C_2x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ y_1=c_1x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

می‌باشند.

11- حل گزینه (4) صحیح است، نقاط تکین می‌توانند نقاط $x=0$ و $x=1$ باشند حال نقطه $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$y''+\frac{1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x^2(x-1)^3}y=0$$

تابع $g(x)=\frac{1}{x-1},h(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$ هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند لذا $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد، برای بررسی نقطه $x=1$، توابع $g(x)=\frac{1}{u}$ و $h(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$ را باید بررسی نمود چون تابع $h(x)$ در $x=1$ تحلیلی نمی‌باشد لذا $x=1$ نقطه منفرد نامنظم است.

12- حل گزینه (1) صحیح است، با تقسیم طرفین بر ضریب y'' داریم.

$$y''+\frac{2}{3x}y'+\frac{x}{3x^2}y=0$$

چون توابع $g(x)=\frac{2}{3}$ و $h(x)=\frac{x}{3}$ هر دو در $x=0$ تحلیلی می‌باشند لذا $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است حال معادله شاخصی را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2+r(g(e)-1)+h(0)=0\Rightarrow r^2+r\left(\frac{2}{3}-1\right)+0=0$$

$$\Rightarrow r^{2}-\frac{\;}{3}r=0\Rightarrow r_1=0,r_2=\frac{\;}{3}$$

چون تفاضل در ریشه مقدار صحیح نمی‌باشد، لذا جواب‌های مستقل به صورت زیر بیان می‌شود.

$$y_1=x^{0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ y_2=k^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

13- حل؛ گزینه (1) صحیح است، ابتدا معادله را به فرم زیر می‌نویسیم؛

$$y''+\frac{g(x)}{x}y'+\frac{h(x)}{x^2}y=0$$

$$y''-\frac{4}{3x(3x+2)}y'+\frac{4x}{3x^2(3x+2)}y=0$$

$h(x)=\frac{4x}{3(3x+2)},g(x)=\frac{-4}{3(3x+2)}$ هر دو در $x=0$ تحلیلی می‌باشند.

$$r^2+r(g(0|-1)+g(0))=0$$

$$r^2+r\left(-\frac{2}{3}-1\right)+0=0\Rightarrow r=0,r=\frac{5}{3}$$

14- حل گزینه (3) صحیح است ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y''-\frac{3}{x}y'+\frac{x+4}{x^2}y=0\Rightarrow g(x)=-3,h(x)=x+4$$

معادله شاخصی $=r^2+r(g(0)-1)+h(0)=r^2+6(-3-1)+4=0$

$=r^2-4r+4=0\Rightarrow r=2$ ریشه مضاعف

15- گزینه (4) صحیح است، $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد زیرا با تقسیم طرفین بر x^2 داریم.

$$y''+\frac{3}{x}y'+\frac{1+x}{x^2}y=0$$

$h(x)=1+x,g(x)=3$ هر دو در $x=0$ تحلیلی می‌باشد ریشه‌های معادله شاخص را به دست می‌آوریم.

$r^2+r(g(0)-1)+h(0)=0\Rightarrow r^2+r(3-1)+1=0\rightarrow r=1$ ریشه مضاعف

$$y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ y_2=y_1 Lnx+x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$$

تستهای تالیفی بخش سوم

۱- فرض کنید ۴ عدد مثبتی و تابع $f_4(x)=\frac{1}{4}$ برای $f_4(x)=0, e2x\le 4$ اگر $x>4$ تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{4\to 0} L[f_4(x)]$ کدام است؟

الف) 1 ب) e^{-4} ج) $\frac{1}{s}$ د) صفر

۲- تبدیل لاپلاس $f(x)=x-[x]$ کدام است؟

الف) $\frac{e^s-1-s}{s^2(1-e^s)}$ ب) $\frac{e^s-1+s}{s(e^s-1)}$ ج) $\frac{e^s-1-s}{s^2(e^s-1)}$ د) $\frac{e^s-1-s}{s(1-e^s)}$

۳- برای کدام تابع زیر $sf(x)$ وجود دارد که $F(s)=1[f(x)]$ شود؟

الف) $F(s)=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ $F(s)=\frac{1}{s^2+s4}$ ج) $F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$ د) $F(s)=\frac{s^2}{s^2+1}$

۴- تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{6s-4}{s^2-4s+2e}$ کدام است؟

الف) $2e^{t}\cos t+2e^{t}\sin t$ ب) $6e^{2t}\cos 4t+2e^{2t}\sin 4t$

ج) $2e^{2t}\cos 2t+6e^{t}\sin 3t$ د) $4e^{t}\cos 4t+2e^{t}\sin 4t$

۵- تبدیل لاپلاس $f(x)=\cos^2 3x$ کدام است؟

الف) $\frac{s^2+s+18}{s(s^2+36)}$ ب) $\frac{s^2+s+36}{s(s^2+36)}$ ج) $\frac{s^2+s+18}{2s(s^2+36)}$ د) $\frac{s^2+s+36}{2s(s^2+36)}$

۶- حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\sin 3x}{x}$ کدام است؟

الف) $\mathrm{Ln}\frac{3}{2}$ ب) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ ج) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ د) $\mathrm{Ln}\frac{2}{3}$

۷- تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1}{(s-3)(s^2+1)}$ عبارت است از:

الف) $\frac{1}{10}(e^{3x}-3\sin x-\cos x)$ ب) $\frac{1}{10}(2e^{3x}-3\sin x+\cos x)$

ج) $\frac{1}{10}(2e^{3x}+3\cos x-\sin x)$ د) $\frac{1}{10}(e^{3x}-3\cos x-\sin x)$

۸- جواب معادله انتگرالی $y(x)=x+\int_0 y(t)\sin(x-t)dt$ کدام است؟

الف) $y(x)=x^3+\frac{1}{12}x^4$ ب) $y(x)=x^3-\frac{1}{12}x^4$

ج) $y(x)=x^3-\frac{1}{20}x^5$ د) $y(x)=x^3+\frac{1}{20}x^5$

۹- جواب معادله انتگرال و دیفرانسیل $y'(x)+3y(x)+2\int_0^x y(t)dt=3$ ، $y(e)=1$ کدام است؟

الف) $y(x)=e^{2x}+2e^{-x}$ ب) $y(x)=e^{x}-e^{-2x}$

ج) $y(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$ د) $y(x)=e^{-x}+e^{-2x}$

۱۰- حاصل انتگرال $\int_0^\infty xe^{-5x}\cos 2x dx$ کدام است؟

الف) $\frac{27}{481}$ ب) $\frac{25}{841}$ ج) $\frac{23}{481}$ د) $\frac{21}{841}$

۱۱- اگر $y(0)=y'(0)=0$ باشد جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=u_{2\pi}(x)$ که در آن $u_{2\pi}$ تابع پله‌ای واحد است برابر است با:

الف) $y(x)=(1-\cos x)u_{2\pi}(x)$ ب) $y(x)=1-\cos x$

ج) $y(x)=1-\cos^2 x$ د) $y(x)=\sin x u_{2\pi}(x)$

۱۲- جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x_1'=2x_1+3x_2 \\ x_2'=x_1+4x_2 \end{cases}$ کدام است؟

الف) $\begin{cases} x_1=-3c_1e^t+c_2e^{5t} \\ x_2=c_1e^t+c_2e^{5t} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x_1=3c_1et+c_2e^{5t} \\ x_2=c_1et+2c2e^{5t} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x_1=c_1e^t+3c_2e^{5t} \\ x_2=3c_1et+c2e^{5t} \end{cases}$ د) $\begin{cases} x_1=c_1e^t-3c2e^{5t} \\ x_2=3c_1et+2c2e^{5t} \end{cases}$

۱۳- تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}$ در $t=0$ کدام است؟

الف) 1 ب) $-\frac{3}{2}$ ج) $-\frac{5}{2}$ د) 5

۱۴- اگر $F(s)=\frac{}{s^2\left(s^2+1\right)}$ باشد: $L\ \{F(S)\}$ برابر است با:

الف) $f(t)=t-\sin t$

ب) $f(t)=t+\cos t$

ج) $f(t)=t^2-\sin t$

د) $f(t)=t^2+\cos t$

۱۵- تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\operatorname{ar}\cot(s+4)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{t}e^{4t}\cos 2t$

ب) $\frac{1}{t}e^{4t}\sin 2t$

ج) $\frac{1}{t}e^{-4t}\cos t$

د) $\frac{1}{t}e^{-4t}\sin t$

۱۶- اگر $y(0)=y'(0)=0$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y''+4y=2\sin 3t$ کدام است؟

الف) $L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+10s+16}\right\}$

ب) $L^{-1}\left\{\frac{6}{s^4+13s^2+36}\right\}$

ج) $L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+7s+16}\right\}$

د) $L^{-1}\left\{\frac{6}{s^4+9s^2+36}\right\}$

۱۷- تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\operatorname{Ln}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)$

ب) $\frac{1}{t}\left(e^{t}-e^{-t}\right)$

ج) $\frac{1}{t}\left(e^{t}+e^{-t}\right)$

د) $\frac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)$

۱۸- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}dt$ کدام است؟

الف) $\operatorname{Ln}2$

ب) $\operatorname{Ln}\sqrt{3}$

ج) $\operatorname{Ln}\sqrt{2}$

د) $\operatorname{Ln}3$

۱۹- تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{-3x}\sin 2x$ کدام است؟

الف) $\frac{2}{s^2+6s+13}$

ب) $\frac{s}{s^2+6s+13}$

ج) $\frac{s}{s^2-4s+13}$

د) $\frac{2}{s^2-6s+13}$

۲۰- لاپلاس معکوس $F(s) = Ln\frac{}{s+3}$ **کدام است؟**

الف) $\frac{1}{x^2}\left(e^{-3x} - e^{-x}\right)$

ب) $\frac{1}{x}(e^{-2x} - e^{-x})$

ج) $\frac{1}{x}(e^{-x} + e^{3x})$

د) $\frac{1}{x^2}\left(e^{-x} + e^{3x}\right)$

جواب‌های تستی بخش سوم

۱- گزینه (۱) صحیح است.

$$L[f_4(x)]=\int_0^{\infty} e^{-sx} f_4(x)dx=\int_0^{4} e^{-sx}\frac{1}{4}dx=\frac{1-e^{se}}{s4}$$

بنابر قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{4\to 0} L[f_4(x)]=\lim\frac{1-e^{-s4}}{s^4}=\lim_{4\to 0}\frac{Se^{-s4}}{s}=1$$

۲- گزینه (۳) صحیح است.

ابتدا $L([X])$ را می‌یابیم:

$$L([x])=\int_0^{\infty}[x]_e^{-sx}dx=\int_0^{1}\mathbf{0}\,e^{-sx}dx+\int_0^{2}1e^{-sx}dx+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{-s}+^{-2s}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}=\frac{1}{s\left(e^{4}-1\right)}$$

$$\Rightarrow L[f(x)]=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s\left(e^{4}-1\right)}=\frac{e^{s}-1-1}{s^2\left(e^{4}-1\right)}$$

۳- گزینه (۴) صحیح است.

فرض کنید $f(x)$ بر بازه‌ی $[\mathbf{0},+\infty)$ پیوسته قطعه‌ای از مرتبه نمایی باشد اگر $L[f(x)]=F(s)$ آن گاه $\lim_{S\to\infty} F(s)=\mathbf{0}$ که

در گزینه 4 چنین چیزی برقرار نیست.

۴- گزینه (۲) صحیح است.

$$F(s\frac{6(s-2)}{(s-2)^2+16}+\frac{2\times 4}{(s-2)^2+16}$$

$$f(x)=6e^{2t}\cos 4t+2e^{2t}\sin 4t$$

۵- گزینه (۴) صحیح است.

$$f(x)=\cos^2 3x=\frac{1}{2}(1+\cos 6x)$$

$$f(s)=\frac{1}{2}L[1]+\frac{1}{2}L[\cos 6x]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+36}=\frac{s^2+s+36}{2s\left(s^2+36\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty f(s)d(s)$$

فرض می‌کنیم $f(x)=e^{-2x}\sin 3x$ باشد در این صورت:

$$f(s=\frac{3}{(s+2)^2+9}\Rightarrow I=\int_0^\infty \frac{3dx}{(s+2)^2+9}=\int_0^\infty \frac{\frac{d4}{3}}{(\frac{s+2}{3})^2+1}$$

اگر فرض $\frac{s+2}{3}=z$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{2}{3}}^\infty \frac{dz}{z^2+1}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{2}{3}=\cot^{-1}\frac{2}{3}=\tan^{-1}\frac{3}{2}$$

۷- گزینه (۱) صحیح است.

با استفاده از قضیه‌ی انتگرال‌گیری تلفیقی (کانولوشن) داریم:

$$F(s\frac{1}{s-3}.\frac{1}{s^2+1}=L\{e^{3x}\}L\{\sin x\}=L\{(g^*h)(x)\}$$

که در آن $h(x)=\sin x, y(x)=e^{3x}$ پس:

$$f(x)=1g^*h(x)=\int_0^x e^{3t}\sin(x-t)dt=\frac{e^{3t}}{9+1}[3\sin(x-t)+\cos(x-t)]_0^x$$

$$=\frac{1}{10}e^{3x}-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x$$

۸- گزینه (۴) صحیح است.

از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم؛

$$L[y(x)]=L[x^3]+L[\sin x]L[y(x)]$$

$$y=\frac{3!}{s^4}+\frac{1}{s^2+1}y\xrightarrow{\text{پس از حل معادله}}y=\frac{3!}{s^4}+\frac{3!}{s^6}$$

$$\Rightarrow y(x)=x^3+\frac{1}{20}x^5$$

۹- گزینه (۳) صحیح است.

تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$sy - y(e) + 3y + 2\frac{}{s}y = \frac{}{s}$$

$$y = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow y2e^{-x} - e^{-2x}$$

۱۰- گزینه (۴) صحیح است.

با مقایسه این انتگرال با تبدیل لاپلاس داریم:

$$I = \int_0^\infty e^{-5x} f(x)dx = F(5)$$

از طرف دیگر $f(x) = x\cos 2x \Rightarrow f(s) = -(\frac{s}{s^2+4})' = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

$$I = f(5) = \frac{25-4}{(25+4)^2} = \frac{21}{841}$$

۱۱- گزینه (۱) صحیح است.

$$S^2y - s(\mathbf{0}) - (\mathbf{0}) + y = \frac{e^{-2}\pi s}{s}$$

$$\Rightarrow y = e^{-2\pi s}\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$f(s) = \frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s}.\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow f(x) = 1 - \cos x$$

بنابر قضیه‌ی دوم انتقال دادیم:

$$y = L^{-1}\left[e^{-2\pi s}F(s)\right] = f(x-2\pi)u_{2\pi}(x)$$

$$= \left[(1-\cos(x-2\pi)\right]u_{2\pi}(x) = (1-\cos x)u_{216}(x)$$

۱۲- گزینه (۱) صحیح است.

معادله مشخصه چنین است:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = \mathbf{0} \to \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a_1-\lambda)A + b_1B = \mathbf{0} \\ a_2A + (b_2-\lambda)B = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + 3B = \mathbf{0} \\ A + 3B = \mathbf{0} \end{cases}$$

که تعداد نامتناهی جواب دارد اگر $B = 1$ و $A = -3$ باشد آنگاه:

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda_1 t} = -3e^t \\ y = Be^{\lambda_1 t} = e^t \end{cases}$$ جواب غیر بدیهی

$$\lambda_2 = 5 \Rightarrow \left\{ A - B = 0 \right. \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} A = B = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = Ae^{\lambda_2 t} = e^{5t} \\ y = Be^{\lambda_2 t} = e^{5t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3c_1e^{t} + c_2e^{5t} \\ x_2 - c_1e^{t} + c_2e^{5t} \end{cases}$$

۱۳- گزینه (۵) صحیح است.

$$F(s) = \frac{4}{s+4} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = 4e^{-4t} + \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t$$

$$f(0) = 4 + 1 - 0 = 5$$

۱۴- گزینه (۱) صحیح است.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+1}\right\} = \int \sin x dx = 1 - \text{cops}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}.\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos x)dx = t - \sin t$$

۱۵- گزینه (۴) صحیح است.

$$F'(s) = -\frac{1}{1+(S+4)^2}$$

$$F(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\} = \frac{1}{t}e^{-4t}L^{-1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{t}e^{-4t}\sin t$$

۱۶- گزینه (۲) صحیح است.

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = 2L\{\sin 3t\}$$

$$s^2y - sy(e) - y'(e) + 4y = \frac{6}{s^2+9}$$

$$s^2y + 4y = \frac{6}{s^2 9} \Rightarrow y = \frac{-6}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{6}{s^4+13s^2+36}$$

در نتیجه $6 = L^{-1}\{s^4 + 13s^2 + 36\}$ بنابر قضیه کندولوشن داریم:

$$6 = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\sin 2t - \sin 3t\right)$$

$$F(s) = \mathrm{Ln}\,(s+1) - \mathrm{Ln}\,(s-1)$$

$$:\{+f(t)\} = -F'(s) = -\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right)$$

$$tf(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right\} = e^{t} - e^{-t}$$

۱۸- گزینه (۳) صحیح است.

$$f(t) = e^{-t}(1-\cos t)$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

$$= (\mathrm{Ln}(s+1) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}((s+1)^2+1))J_0^\infty$$

$$= \mathrm{Ln}\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+1}}J_0^\infty = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}^2 = \mathrm{Ln}\sqrt{2}$$

۱۹- گزینه (۱) صحیح است.

$$L\{\sin 2x\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$F(s) = L\{e^{-3x}\sin 2x\} = \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{2}{s^2+6s+13}$$

۲۰- گزینه (۲) صحیح است.

$$F(s) = \mathrm{Ln}\,(s+1) - \mathrm{Ln}\,(S+3)$$

$$F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$L\{e^{-x}\} = \frac{1}{s+1}, L\{e^{-3x}\} = \frac{1}{s+3}$$

$$F'(s) = L\{e^{-x}\} - L\{e^{-3x}\} = L\left\{x\frac{e^{-x}}{x} - x\frac{e^{-3x}}{x}\right\}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x}L^{-1}\{F'(s)\} = \frac{1}{x}\left(e^{-3x} - e^{-x}\right)$$

فصل چهارم: تبدیل لاپلاس

1

) تعاریف اولیه:

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که آن را با نماد $L[f(t)]$ یا $F(s)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s)=L[f(t)]=\int_{o}^{\infty} e^{-st}.f(t)dt$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌گوییم

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم عبارتند از: (α یک عدد ثابت و n یک عدد طبیعی فرض شده است):

ردیف	$f(t)$	$F(s)$	شروط
1	$f(t)=a$	$F(s)=\frac{a}{b}$	$s>0$
2	$f(t)=e^{at}$	$F(s)=\frac{1}{s-a}$	$s>a$
3	$f(t)=\cos at$	$F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>a$
4	$f(t)=\sin at$	$F(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>a$
5	$f(t)=\cosh at$	$F(s)=\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
6	$f(t)=\sinh at$	$F(s)=\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
7	$f(t)=t^n$	$F(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n\in N; s>0$
8	$f(t)=t^a$	$F(s)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$a>-1; s>0$
9	$f(t)=J_o(at)$	$F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
10	$f(t)=J_n(at)$	$F(s)=\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$
11	$f(t)=u(t-a)$	$F(s)=\frac{e^{-as}}{s}$	$s>0$
12	$f(t)=\delta(t-a)$	$F(s)=e^{-as}$	$s>0$

با توجه به اینکه در مبحث تبدیل لاپلاس از توابع گاما و خواص آن به وفور استفاده می‌شود در اینجا بـه یـادآوری نکـاتی خـاص از تابع گاما می‌پردازیم.

تابع گاما در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(a)=\int_o^{\infty} e^{-x}.x^{a-1}dx$$

ثابت می‌شود تابع فوق همگرا است اگر و فقط اگر $a>0$ باشد.

نکات زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a);$$

$$\Gamma(a+1)=a!;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{n}$$

تابع دلتای دیراک

تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_a(t)=\delta(t-a)=\begin{cases} O & t=a \\ \infty & t=a \end{cases}$$

به طوری‌که همواره:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)dt=1$$

به خاطر داشته باشید می‌توان نشان داد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta_a(t)dt=f(a)$$

پس می‌توان دید:

$$L\{\delta_a(t)\}=\int_O^{\infty} e^{-st}\delta_n(t)dt=e^{-sa}$$

از بحث‌های فوق دو نوع مسئله زیر قابل حل است:

1) در محاسبه لاپلاس معکوس توابع کسری که در قالب یک کسر نوشته و صورت و مخـرج دو چندجملـه‌ای s مـی‌باشـد. چنانچـه بتوانیم تابع مذکور را با روش تجزیه کسرها به صورت مجوع کسرهای جزئی بنویسیم معمولاً محاسبه لاپلاس معکـوس بـه سـادگی صورت می‌گیرد.

۲) در بسیاری از مواقع برای محاسبه انتگرال‌های ناسره‌ای به خصوص مسائلی که در قالب کلی $\int_{O}$ بیان می‌شود استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس می‌تواند حل مسئله را به سادگی امکان‌پذیر کند.

قضایای تبدیل لاپلاس

قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی

فرض کنید $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد، می‌توان نشان داد:

قضیه مقدار نهایی: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to O} s.F(s)$

قضیه مقدار اولیه: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} s.F(s)$

قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب

فرض کنید تابع $f(t)$ برای tهای مثبت تابعی متناوب با دوره تناوب p باشد، می‌توان نشان داد:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_{O}^{P} e^{-st}.f(t)\,dt$$

قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

هرگاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم:

$$L\left(f'(t)\right)=s.F(s)-f(o)$$
$$L\left(f''(t)\right)=s^2F(s)-sf(o)-f'(o)$$
$$L\left(f'''(t)\right)=s^3F(s)-s^2f(o)-sf'(o)-f''(o)$$

و نیز می‌توان نشان داد:

$$f(o)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$
$$f'(o)=\lim_{s\to\infty} s^2F(s)-sf(o)$$
$$f''(o)=\lim_{s\to\infty} s^3F(s)-s^2f(o)-sf'(o)$$

قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال‌های یک تابع

هرگاه $L\{f(t)\}=F(s)$ باشد می‌توان نشان داد:

$$L\left\{\int_{o}^{t} f(u)\,du\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

و در فرم معکوس:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(u)du$$

قضیه اول انتقال

اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد داریم:

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s)\Big|_{s\to(s-a)} = F(s-a)$$

و در فرم معکوس داریم:

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}.f(t)$$

قضیه دوم انتقال

هرگاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد داریم:

$$1: L\{u_c(t).f(t-c)\} = e^{-cs}.F(s)$$

و یا:

$$2: L\{u_c(t).f(t)\} = e^{-cs}L\{f(t+c)\}$$

و در فرم معکوس داریم:

$$L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t).f(t-c)$$

قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

هرگاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد داریم:

$$L\{t^n.f(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

و به خصوص برای $n=1$ داریم:

$$L\{t.f(t)\} = -F'(s)$$

و در فرم معکوس داریم:

$$L^{-1}\{F'(s)\} = -t.f(t)$$

نکته: تبدیل معکوس عبارت‌های شامل Ln و معکوس‌های مثلثاتی و هذلولی (هیپربولیک) از رابطه فوق به‌دست می‌آید.

قضیه انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس:

هرگاه $L\{f(t)\} = F(s)$ باشد داریم:

$L\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}=\int_s^{\infty}F(s).ds$

قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع

پیچش دو تابع $g(t),f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(f^0g\right)(t)=\int_o^t f(\lambda).g(t-\lambda)d\lambda=\int_o^t f(t-\lambda).g(\lambda)d\lambda$$

می‌توان نشان داد هرگاه $L\{g(t)\}=G(s);L\{f(t)\}=F(s)$ باشد داریم:

$$L\left\{f^0g(t)\right\}=F(s).F(s)$$

و در فرم معکوس:

$$L^{-1}\left\{F(s).G(s)\right\}=\left(f^0g\right)(t)$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیررا پیدا کنید.

$$f(t)=4t^2-2\cos 3t+5e^{-t}-3\sinh 2t+1$$

حل

$$L f(t)=4Lt^2-2L\cos 3t+5Le^{-t}-3L\sinh 2t+L_1$$

$$F(s)=\frac{8}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{5}{s+1}-\frac{6}{s^2-4}+\frac{1}{s}$$

مثال: تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید.

$$F(s)=\frac{s}{s^2-2}+\frac{3}{s^2-2}+2\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}$$

$$L^{-1}F(s)=L^{-1}\frac{s}{s^2-2}+\frac{3}{\sqrt{2}}L^{-1}\frac{\sqrt{2}}{s^2-2}+2L^{-1}\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{2}L^{-1}\frac{2}{s^2+4}$$

$$=\cosh\sqrt{2}t+\frac{3}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t+2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ را پیدا کنید.

حل:

$$f(t^{-1/2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{1/2}}=\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\quad,\quad s>0$$

1. اگر $\frac{3}{s+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ باشد.

1) $f(s)=3(x+4)$ می‌باشد.

2) $f(x)=4e^{-3x}$ می‌باشد.

3) $f(x)=3e^{4x}$ می‌باشد.

4) $f(x)=3e^{-4x}$ می‌باشد.

حل:

$$L^{-1}\frac{3}{s+4}=3\,L^{-1}\frac{1}{s+4}=3e^{-4x}$$

تبدیل لاپلاس مشتق

قضیه:

اگر $f(t)$ تابعی پیوسته روی $t\geq 0$ و $f'(t)$ تابعی پیوسته قطعه‌ای روی $t\geq 0$ باشد، آن‌گاه:

$$L[f'(t)]=s\,L[f(t)]-f(0^+)$$

و اگر تابع $f(t)$ و $f'(t)$ روی $t\geq 0$ پیوسته و $f''(t)$ تابعی پیوسته قطعه ای روی $t\geq 0$ باشد. داریم:

$$L[f''(t)]=s^2\,L[f(t)]-sf(0^+)-f'(0^+)$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\cos^2 t$ را حساب کنید.

حل:

$$f'(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t\ \ ,\ \ f(0)=1$$

$$s\,L(\cos^2 t)=1-\frac{2}{s^2+4}=\frac{s^2+2}{s^2+4}\Rightarrow L(\cos^2 t)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

2. **جواب معادله دیفرانسیل همگن** $f''(t)+8f'(t)+16f(t)=0$ **با شرایط اولیه** $f(0)=2$ **و** $f'(0)=1$ **برابر است با:**

1) $f(t)=(2+5t)e^{-4t}$

2) $f(t)=\frac{1}{8}(7e^{-4t}+9e^{4t})$

3) $f(t)=\frac{1}{4}(3e^{-2t}+5e^{2t})$

4) $f(t)=(2+9t)e^{-4t}$

حل: معادله مفسر دارای ریشه مضاعف است، زیرا:

$$t^2+8t+16=0\Rightarrow (t+4)^2=0\Rightarrow t=-4$$

و گزینه‌های (2) و (3) درست نمی‌باشند. جواب عمومی به فرم زیر می‌باشد.

$$f(t)=(c_1+c_2t)e^{-4t}\ ,\ f(0)=c_1=2$$

$$f'(t)=c_2e^{-4t}-4(c_1+c_2t)e^{-4t}\ ,\ f''(0)=c_2-4c_1=1\Rightarrow c_2=9$$

گزینه (4) صحیح است.

$$f(t)=(2+9t)e^{-4t}$$

$$L f'' + 8 L f' + 16 L f = 0$$

$$s^2F(s) - 2s - 1 + 8sF(s) - 16 + 16F(s) = 0$$

$$F(s) = \frac{2s+17}{s^2+8s+16} = \frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}$$

$$f(t) = e^{-4t} L^{-1}\frac{2s+9}{s^2} = e^{-4t}(2+9t)$$

3. **هرگاه $y'(0)=0$ ، $y(0)=0$ و $y''-y'+y=t$، آن‌گاه $L(y)$ برابر است با:**

(1 $\frac{s-1}{s^2(s^2-s+1)}$ (2 $\frac{s+1}{s^2(s^2-s+1)}$ (3 $\frac{1}{s^2(s-1)}$ (4 $\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$

حل:

$$L(y'') - L(y') + L(y) = L(t)$$

$$s^2 L(y) - s\, L(y) + L(y) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$$

4. **اگر $\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x)$ و تبدیل لاپلاس تابع $J_0(x)$ برابر $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ باشد، آن‌گاه تبدیل لاپلاس تابع $J_1(x)$ برابر است با:**

(1 $1+\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ (2 $1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ (3 $1+\frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}$ (4 $1-\frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}$

حل: چون تبدیل **لاپلاس** $J_1(x)$ را می‌خواهیم، لذا کافیست در رابطه داده شده $n=0$ اختیار کنیم.

$$\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x)$$

با توجه به فرمول (معادله بسل، توابع بسل نوع اول و نوع دوم)، $J_0(0)=1$ حال، استفاده می‌کنیم. داریم:

$$L[J_0'(x)] = s\,L[J_0(x)] - J_0(0)$$

$$-L[J_1(x)] = s \times \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - 1 \Rightarrow L[J_1(x)] = 1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

5. **اگر لاپلاس $f(t)$ برابر باشد با $F(s) = L[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ در این صورت $f(t)$ برابر است با:**

(1 $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x/2)^{2r}}{(r!)^2}$ (2 $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x/2)^{2r}}{r!(r!+1)!}$

(3 $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x/2)^{2r+1}}{(r!)^2}$ (4 $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x/2)^{2r}}{r!(r-1)!}$

حل: با توجه به مثال بالا، مشخص است که جواب، $J_0(x)$ می‌باشد. با استفاده از بسط دو جمله‌ای (a) داریم:

$$(a)\,(1+x)^r = 1 + rx + \frac{\quad}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$$(1+s^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s}[1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s^2}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}\ \frac{1}{s^4}+\ldots$$

$$= \frac{1}{s}[1-\frac{1}{2^1\times 1!}\times\frac{1}{s^2}+\frac{1\times 3}{2^2\times 2!}\times\frac{1}{s^4}+\ldots+(-1)^n\,\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n\times n!}\times\frac{1}{s^{2n}}+\ldots]$$

جمله عمومی را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت. بنابراین:

$$(-1)^n\ \frac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\frac{1}{s^{2n}}$$

$$L^{-1}\ \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\times\frac{1}{s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{1}{(2^n\times n!)^2}\,x^{2n}$$

گزینه (1) صحیح می‌باشد.

3 . 6 : تبدیل لاپلاس انتگرال

اگر $L\,f(t) = F(s)$ باشد، آن‌گاه:

$$L\left[\int_0^t f(r)\,dr\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$L^{-1}\,\frac{1}{s}F(s) = \int_0^t f(r)\,dr$$

مثال: تبدیل معکوس تابع $\frac{1}{s(s+2)}$ را پیدا کنید.

حل: $L^{-1}\,\frac{1}{s+2} = e^{-2t}$ و با استفاده از فرمول داریم:

$$L^{-1}\frac{1}{s(s+2)} = \int_0^t e^{-2r}\,dr = \frac{1}{2}e^{-2r}\Big|_0^t = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y' = 1\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$$

حل: از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$L\,y'' - 4\,L\,y' = L1$$

با استفاده از فرمول‌ها داریم:

$$s^2\,L(y) - sy(0) - y'(0) - 4s\,L(y) - y(0) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 L(y) - 4s\, L(y) = \frac{1}{s} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2(s-4)}$$

$$y(t) = L^{-1}\frac{1}{s^2(s-4)} = \int_0^t \left[\int_0^t e^{4r} dr\right] dt = \int_0^t \left(\frac{1}{4}e^{4r}\Big|_0^t\right) dt = \frac{1}{4}\int_0^t (e^{4t}-1)\, dt$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4t} - 4t - 1)$$

6. **تبدیل لاپلاس معکوس تابع $\frac{s+1}{s^3+s}$ برابر است با:**

1) $1+\cos t+\sin t$ 2) $1+\cos t-\sin t$

3) $1-\cos t+\sin t$ 4) $-1+\cos t+\sin t$

حل:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3+s} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$f(t) = \sin t + \int_0^t \sin r dr = \sin t - \cos r\Big|_0^t = 1 - \cos t + \sin t$$

6 . 4 : قضایای انتقال

قضیه:

اگر $L[f(t)] = F(s)$ باشد، آن‌گاه:

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} L^{-1} F(s)$$

تعریف:

تابع پله‌ای واحد که با نماد $u_c(t)$ یا $u(t-c)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t<c \\ 1 & \text{اگر } t>c \end{cases} \quad , c \ge 0$$

و $L\,[u_c(t)] = \frac{1}{s}e^{-sc}$

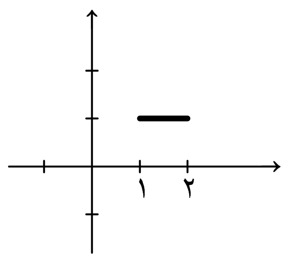
قضیه:

اگر $L\,[f(t)] = F(s)$ ، $c \ge 0$ باشد، آن‌گاه:

$$L[u_c(t)f(t-c)] = e^{-cs} L[f(t)] = e^{-cs}F(s)$$

$$L[u_c(t)f(t)] = e^{-cs}\, L[f(t+c)]$$

7. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در شکل نشان داده شده است. کدام‌یک از مقادیر زیر است؟



1) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}(1-e^{-s})$

2) $F(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s-2}$

3) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+1} - \dfrac{e^{-2s}}{s+2}$

4) $F(s) = \dfrac{u(s-1)}{s+1} - \dfrac{u(s-2)}{s+2}$

حل:

$$f(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

$$F(s) = L\,[u_1(t)] - L\,[u_2(t)] = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{e^{-s}}{s}(1-e^{-s})$$

8. تبدیل لاپلاس تابع زیر کدام است؟

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 2n \le t < 2n+1 \\ -1 & 2n+1 \le t < 2n+2 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

1) $L(f(t)) = \dfrac{1}{s}\tan h\dfrac{s}{2}$

2) $L(f(t)) = \dfrac{1}{s}\,\dfrac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$

3) $L(f(t)) = \dfrac{1}{s}\,\dfrac{1^{-s}}{1+e^{-s}}$

4) $L(f(t)) = \dfrac{1-e^{-s/2}}{1+e^{-s/2}}$

حل:

$$f_n(t) = u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) - u_{2n+1}(t) + u_{2n+2}(t)$$

$$L(f_n(t)) = \frac{1}{s}(e^{-2ns} - 2e^{-2ns-s} + e^{-(2n+2)s}) = \frac{1}{s}e^{-2ns}(1-e^{-s})^2$$

$$L(f(t)) = \frac{1}{s}(1-e^{-s})^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ns} = \frac{1}{s}(1-e^{-s})^2 \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$$

9. تبدیل لاپلاس $2e^{-2t}\sin 2t$ برابر است با:

1) $2((s+1)^2+4)^{-1}$

2) $2((s+1)^2+4)^{-1}$

3) $((2s+1)^2+4)^{-1}$

4) $4((s+2)^2+4)^{-1}$

$$F(s)=\frac{2}{s^2+4}\Rightarrow F(s+2)=\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

$$L(2e^{-2t}\sin^{2t})=2F(s+2)=4((s+2)^2+4)^{-1}$$

.10 **مبدل لاپلاس معکوس** $F(s)=\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ **کدام‌یک از توابع زیر می‌باشد: توجه شود که تابع** $u_a(t)=u(t-a)$ **تابع پله‌ای واحد است؟**

1) $u_2(t)\sinh(t-4)$ 2) $u_2(t)\sinh(2t-2)$

3) $u_2(t)\sinh(t-2)$ 4) $u_2(t)\sinh(2t-4)$

حل:

$$L^{-1}[e^{-2s}\times\frac{2}{s^2-4}]=u_2(t)f(t-2)$$

که $f(t)=L^{-1}\frac{2}{s^2-4}=\sinh 2t$ ، بنابراین جواب به صورت زیر می‌باشد.

$$u_2(t)\sinh 2(t-2)=u_2(t)\sinh(2t-4)$$

.11 **تبدیل لاپلاس تابع** $f(t)=e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$ **برابر است با:**

1) $s-3$ 2) $\frac{2s-21}{s^2-6s+34}$ 3) $\frac{2s+9}{s^2+34}$ 4) $\frac{s+3}{s^2+5s+16}$

حل:

$$F(s)=L\,f(t)=L[e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)]=F_1(s-3)$$

$$F_1(s)=L(2\cos 5t-3\sin 5t)=\frac{2s}{s^2+25}-\frac{15}{s^2+25}=\frac{2s-15}{s^2+25}$$

$$F(s)=\frac{2(s-3)-15}{(s-3)^2+25}=\frac{2s-21}{s^2-6s+34}$$

.12 **تبدیل لاپلاس تابع** $e^{-t}\cos 2t$ **کدام است؟**

1) $\frac{s}{s^2+1}$ 2) $\frac{s-1}{s^2+2s+5}$ 3) $\frac{s}{s^2-1}$ 4) $\frac{s+1}{s^2+2s+5}$

حل:

$f(t)=\cos 2t\Rightarrow F(s)=\frac{s}{s^2+4}\Rightarrow F(s+1)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ و با توجه به فرمول ؟؟؟ و انتخاب $f(t)=\cos 2t$ و $a=-1$ داریم:

$$L(e^{-t}\cos 2t)=F(s+1)=\frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

13. **تبدیل لاپلاس تابع پیوسته $f(t)$ و $t \ge 0$ برابر است با:** $F(s) = L\,[f(t)] = \frac{\text{[illegible]}}{(1+s)^2+1}$

1) $f(t) = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$

2) $f(t) = u_\pi(t)e^{(t-\pi)}\sin(t-\pi)$

3) $f(t) = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

4) $f(t) = u_\pi(t)e^{(t-\pi)}\sin(t)$

حل:

$$L^{-1}[e^{-\pi s}\frac{1}{(1+s)^2+1}] = L^{-1}[e^{\pi}e^{-\pi(s+1)}\frac{1}{(1+s)^2+1}]$$

$$e^{\pi}\ L^{-1}[e^{-\pi(1+s)}\frac{1}{(1+s)^2+1}]$$

$$= e^{\pi}e^{-t}\ L^{-1}[e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}]$$

$$= e^{-(t-\pi)}u_\pi(t)\sin(t-\pi)$$

14. **تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{\sqrt{4s-1}}$ برابر است با:**

1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{1/2}e^{-t/4}$ 2) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{t/4}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-t/4}$ 4) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{1/2}e^{t/4}$

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{4s-1}} = \frac{1}{2\sqrt{s-\frac{1}{4}}}\ ,\ \frac{1}{2}L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}e^{t/4}L^{-1}\frac{1}{s^{1/2}}$$

با استفاده از فرمول $L(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ و انتخاب $a = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$L^{-1}\frac{1}{s^{1/2}} = \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

بنابراین:

$$L^{-1}\frac{1}{\sqrt{4s-1}} = \frac{1}{2}e^{t/4}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

15. **معکول تبدیل تابع $\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ کدام است؟**

1) $e^t\cos 2t + e^t\sin 2t$ 2) $e^t\sin 2t$

3) $e^t\cos 2t$ 4) $e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$

$$L^{-1}\frac{s-1}{s^2-2s+5}=L^{-1}\frac{s-1}{(s-1)^2+4}=e^t L^{-1}\frac{s}{s^2+4}=e^t\cos 2t$$

16. **معکوس تبدیل لاپلاس** $\frac{3s+7}{s^2-2s-3}$ **برابر است با:**

1) $4e^{-3t}-e^t$ 2) $4e^{3t}-e^{-t}$ 3) $4e^{-3t}-e^t$ 4) $4e^{3t}+e^{-t}$

حل:

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\equiv\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}\Rightarrow 3s+7\equiv A(s+1)+B(s-3)$$

$$s=3\Rightarrow 16=4A\Rightarrow A=4$$

$$s=-1\Rightarrow 4=-4B\Rightarrow B=-1$$

$$L^{-1}\frac{3s+7}{s^2-3s-3}=L^{-1}\frac{4}{s-3}-L^{-1}\frac{1}{s+1}=4e^{3t}-e^{-t}$$

6 . 5 : مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس، انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس

قضیه:

اگر $L[f(t)]=F(s)$ ، آن‌گاه:

$$F^{(n)}(s)=L[(-t)^n f(t)]$$

از طرفین رابطه بالا، تبدیل معکوس می‌گیریم $n=1$، داریم:

$$f(t)=\frac{-1}{t}L^{-1}F'(s)$$

حل: اگر $L[f(t)]=F(s)$ و $\lim_{t\to 0^+}=\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(u)\,du$$

با توجه به فرمول داریم:

$$f(t)=t\,L^{-1}\int_s^\infty F(u)du$$

17. **اگر** $L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^m}{ds^n}F(s)$ **باشد. تبدیل لاپلاس** $L[t^2e^{2t}]$ **برابر است با:**

1) $\frac{2}{(s-2)^3}$ 2) $\frac{1}{(s-2)^2}$ 3) $\frac{2!s}{(s-2)^3}$ 4) $\frac{1}{(s+3)^2}$

$$L[t^2e^{2t}] = F_1''(s)$$

$$F_1(s) = L\ e^{2t} = \frac{1}{s-2}$$

$$F_1'(s) = \frac{-1}{(s-2)^2}\ ,\ F_1''(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

18. **اگر تبدیل لاپلاس تابع f (t) برابر** $F(s)$ **باشد. آن‌گاه تبدیل لاپلاس تابع** $tf(t)$ **برابر است با:**

1) $SF'(s)$ 2) $F'(s)$ 3) $-F'(s)$ 4) $-SF'(s)$

حل: گزینه (3) درست است.

19. **اگر تبدیل لاپلاس توابع** $\sin\alpha t$ **و** $\cos\alpha t$ **(** α **پارامتر حقیقی ثابت) به ترتیب برابر** $\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ **و** $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ **باشند. تبدیل لاپلاس تابع** $t\sin\alpha t + e^{\beta t}\cos t$ **(** α **و** β **پارامترهای حقیقی ثابت) برابر است با:**

1) $\frac{-2s\alpha}{(\alpha^2+s^2)^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$ 2) $\frac{2s\alpha}{(\alpha^2+s^2)^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$

3) $\int_0^s \frac{\alpha d\sigma}{\alpha^2+\sigma^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$ 4) $\frac{\alpha s}{s^2\alpha^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$

حل:

$$L(t\sin\alpha t + e^{\beta t}\cos t) = L(t\sin\alpha t) + L(e^{\beta t}\cos t)$$

$$= -\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)' + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1} = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$$

20. **اگر تبدیل لاپلاس** $f(t)$ **برابر** $Ln\frac{s}{s-1}$ **باشد.** $f(t)$ **کدام است؟**

1) $\frac{e^{-t}-1}{t}$ 2) $\frac{e^{-t}-t-1}{t}$ 3) $\frac{e^t-1}{t}$ 4) $\frac{e^t+t-1}{t}$

حل:

$$f(t) = -\frac{1}{t}\ L^{-1}F'(s)$$

$$F(s) = Ln\frac{s}{s-1} = Lns - Lns-1 \Rightarrow F'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

$$L^{-1}F'(s) = 1 - e^t \Rightarrow f(t) = \frac{e^t-1}{t}$$

21. اگر $f(t) = \frac{[illegible]}{t}$ ، $t > 0$ و اگر توابع **f** و **g** دارای تبدیل لاپلاس به ترتیب **F(s)** و **G(s)** باشند. آن‌گاه $F'(s) = -G(s)$ فرض می‌کنیم $F(s) = \mathrm{Ln}\frac{(s^2+4\alpha^2)^{1/2}}{s^{1/2}}$ ، α عددی حقیقی و ثابت، در این صورت:

1) $f(t) = \frac{1-\cos 2\alpha t}{t}$

2) $f(t) = \frac{1-\cos 2\alpha t}{2t}$

3) $f(t) = \frac{1+\cos 2\alpha t}{t}$

4) $f(t) = \frac{1+\cos 2\alpha t}{2t}$

حل:

$$F(s) = \frac{1}{4}\mathrm{Ln}(s^2+4\alpha^2) - \frac{1}{2}\mathrm{Lns} \Rightarrow F'(s) = \frac{s}{2(s^2+4\alpha^2)} - \frac{1}{2s}$$

$$L^{-1}F'(s) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha t - \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{1-\cos 2\alpha t}{2t}$$

22. تبدیل لاپلاس $f(t) = t\sin h(2t)$ برابر است با:

1) $\frac{4s}{(s^2-4)^2}$

2) $\frac{-4s}{(s^2-4)^2}$

3) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

4) $\frac{-4s}{(s^2+4)^2}$

حل:

$$L(t\sin h(2t)) = -\left(\frac{2}{s^2-4}\right)' = \frac{4s}{(s^2-4)^2}$$

23. اگر $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha t)}{t} & t \neq 0 \\ \alpha & t = 0 \end{cases}$ آن‌گاه تبدیل لاپلاس **f (t)** برابر است با:

1) $\tan^{-1}\frac{s}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$

2) $-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha} + \frac{\pi}{2}$

3) $\sin^{-1}\frac{s}{\alpha}$

4) $\cot^{-1}\frac{s}{\alpha}$

حل: چون

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\alpha t}{t} = \alpha \text{ ،}$$

$$L\frac{\sin(\alpha t)}{t} = \int_s^{\infty}\frac{\alpha}{u_2+\alpha^2}du = \tan^{-1}\frac{u}{\alpha}\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\alpha}$$

24. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=(t-\pi)\sin 3te^{2t}u_{\pi}(t)$ عبارت است از:

1) $\dfrac{-2e^{-\pi(s-2)}}{[(s-2)^2+9]^2}$ 2) $-2e^{-\pi(s-2)}\times\dfrac{s-2}{[(s-2)^2+9]^2}$

3) $\dfrac{-2e^{-\pi(s-2)}}{[(s-2)^2+9]^2}$ 4) $2e^{-\pi(s-2)}\times\dfrac{s-2}{[(s-2)^2+9]^2}$

حل:

$$F(s)= L[(t-\pi)\sin 3te^{2t}u_{\pi}(t)]=e^{-\pi s}L[t\sin 3(t+\pi)e^{2(t+\pi)}]$$

$$=e^{-\pi s}e^{2\pi}L[-t\sin 3te^{2t}]=-e^{-\pi(s-)}F_1(s-2)$$

$$F_1(s)=L(t\sin 3t)=-(\frac{3}{s^2+9})'=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

$$F(s)=-e^{-\pi(s-2)}\times\frac{6(s-2)}{[(s-2)^2+9]^2}$$

25. تبدیل لاپلاس معکوس $L^{-1}[(Ln(1+\frac{1}{s})]$ عبارت است از:

1) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ 2) $\dfrac{1-e^{t}}{t}$ 3) $\dfrac{1-e^{-t}}{t^2}$ 4) $\dfrac{1-e^{t}}{t^2}$

حل:

$$F(s)=Ln\frac{s+1}{s}=Ln(s+1)-Lns$$

$$F'(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\Rightarrow L^{-1}F'(s)=e^{-t}-1$$

$$f(t)=\frac{-1}{t}(e^{-t}-1)=\frac{1-e^{-t}}{t}$$

26. تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\cot^{-1}s$ برابر است با:

1) $t\sin t$ 2) $t\cos t$ 3) $\dfrac{\sin t}{t}$ 4) $\dfrac{\cos t}{t}$

حل:

$$F'(s)=\frac{-1}{s^2+1}\Rightarrow L^{-1}F'(s)=-\sin t$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}F'(s)=\frac{\sin t}{t}$$

27. **کدام عبارت در مورد عکس تبدیل لاپلاس** $g(s)=\frac{1}{s}\tan s$ **درست است؟**

1) تابعی است پیوسته قطعه‌ای و هم مرتبه نهایی

2) تابعی است پیوسته و هم مرتبه نهایی

3) تابعی است پیوسته قطعه‌ای و نمی‌تواند هم مرتبه نهایی باشد.

4) با داده‌ای مسئله نوع تابع مشخص نمی‌شود.

حل:

$$L^{-1}\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}=\int_0^t L^{-1}(\tan^{-1}\frac{1}{s})\,dt$$

$$F(s)=\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow F'(s)=\frac{-1/s^2}{1/s^2+1}=\frac{-1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}F'(s)=-\sin t$$

$$f(t)=\frac{-1}{t}(-\sin t)=\frac{\sin t}{t}$$

$$L^{-1}\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}=\int_0^t\frac{\sin}{t}dt$$

که تابعی است پیوسته و هم مرتبه نمایی

28.تبدیل لاپلاس جواب مسئله زیر کدام است؟

$$xy''+(1-x)y'+y=0\,,\ y(0)=1\,,\ y'(0)=-1$$

1) $\frac{s(s-1)}{s+1}$ 2) $\frac{s}{s^2+1}$ 3) $\frac{1}{s(s-1)}$ 4) $\frac{(s-1)}{s^2}$

حل: از طرفین رابطه لاپلاس می‌گیریم فرض کنید:

$$L\ y=Y$$

$$L(xy'')+L\,y'-L\,xy'+L\,y=0$$

$$-[L\,y'']'+sY-y(0)+[L\,y']'+Y=0$$

$$-[s^2Y-sy(0)-y'(0)]'+sY-y(0)=[s\,L\,y-y(0)]'+Y=0$$

$$-2sY-s^2Y'+1+sY-1+Y+sY'+Y=0$$

$$(s-s^2)Y'+(2-s)Y=0\Rightarrow\frac{Y'}{Y}=\frac{2-s}{s(s-1)}=\frac{-2}{s}+\frac{1}{s-1}$$

$\mathrm{Ln}\,Y=-\mathrm{Ln}\,s^2+\mathrm{Ln}(s-1)\Rightarrow Y=\frac{\quad}{s^2}$

.29 اگر $L\,[\sin\alpha t]=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ (تبدیل لاپلاس) ، که در آن α عددی حقیقی است، آن‌گاه $L\,[\frac{\sin\alpha t}{t}]$ برابر است با:

1) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}$ 2) $\frac{1}{s}\mathrm{Ln}(1+\frac{\alpha^2}{s^2})$ 3) $\mathrm{Ln}(1+\frac{\alpha^2}{s^2})$ 4) $-\tan^{-1}\frac{1}{s}$

حل: $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin\alpha t}{t}=\alpha$ ،

$$L\,[\frac{\sin\alpha t}{t}]=\int_s^{\infty}\frac{\alpha}{u^2+\alpha^2}du=\tan^{-1}\frac{u}{\alpha}\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}$$

.30 تبدیل لاپلاس جواب مسئله مقدار اولیه زیر عبارت است از:

$xy''+y'+xy=0\,,\ y(0)=1\,,\ y'(0)=0$

1) $Y(s)=c\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(k!)}{(2k)!2^k}\,\frac{1}{s^{2k}}$ 2) $Y(s)=c\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(k!)}{(2k)!2^k}\,\frac{1}{s^{2k+1}}$

3) $Y(s)=c\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k}}\,\frac{1}{s^{2k+1}}$ 4) $Y(s)=c\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)2^{2k}}\,\frac{1}{s^{2k+1}}$

حل:

$$L\,(xy'')+L\,(y')+L\,xy=0$$

$$-(s^2Y-sy(0)-y'(0))'+sY-y(0)-Y'=0$$

$$-2sY-s^2Y'+1+sY-1-Y'=0\Rightarrow Y'(1+s^2)=-sY$$

$$\frac{Y'}{Y}=-\frac{s}{1+s^2}\Rightarrow \mathrm{Ln}Y=-\mathrm{Ln}\sqrt{1+s^2}+\mathrm{Ln}c\Rightarrow Y=\frac{c}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$Y=c\frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{c}{s}[1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s^2}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}\times\frac{1}{s^2}+\ldots+(-1)^k\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}\times\frac{1}{s^{2k}}\times\ldots]$$

$$Y=c\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2^k\times k!)^2}\times\frac{1}{s^{2k+1}}$$

31. اگر جواب **y(t)** از معادله دیفرانسیل $ty''+2y'+ty=0$ دارای تبدیل لاپلاس $Y(s)=\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt$ باشد.

آن‌گاه:

1) $Y(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ 2) $Y(s)=c-y(0)\tan^{-1}s$

3) $Y(s)=\dfrac{-y(0)}{s^2+1}$ 4) $Y(s)=y(0)(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}s)$

حل: از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم

$$L(ty'')+2L(y')+L(ty)=0$$

$$-(s^2Y-sy(0)-y'(0))'+2sY-2y(0)-Y'=0$$

$$-2sY-s^2Y'+y(0)+2sY-2y(0)-Y'=0$$

$$(s^2+1)Y'=-y(0)\Rightarrow Y'=-\frac{y(0)}{s^2+1}\Rightarrow Y=-y(0)\tan^{-1}s+c$$

32. **تبدیل لاپلاس جواب** $x(i)$ **در مسئله زیر عبارت است از:**

$$\begin{cases} tx+y'=\cos t \\ x'+y=\sin t \end{cases} \qquad y(0)=x(0)=0$$

1) $ce^{s^3/3}$ 2) $ce^{-s^2/2}$ 3) $ce^{-s^3/3}$ 4) $ce^{s^2/2}$

حل:

$$\begin{matrix} L(tx)+Ly'=L\cos t \\ \\ Lx'+Ly=L\sin t \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -\dfrac{dx}{ds}+sY=\dfrac{s}{s^2+1} \\ \\ sx+Y=\dfrac{1}{s^2+1} \end{matrix}$$

معادله دوم را در $-s$ ضرب و با معادله اول جمع می‌کنیم.

$$-\frac{dx}{ds}-s^2x=0\Rightarrow\frac{dx}{x}=-s^2ds\Rightarrow Lnx=-\frac{1}{3}-s^3+c_1\Rightarrow ce^{-s^3/3}$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1t\\x_2t\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1&-3\\3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{cases}$$

مقدار $x_1(1)+x_2(1)$ برابر کدام گزینه است؟

1) $-3e^{-2}$ 2) $2e^{-2}$ 3) $-e^{-2}$ 4) $5e^{-2}$

حل:

$$\begin{cases}x'_1(t)=x_1(t)-3x_2(t)\\x'_2(t)=3x_1(t)-5x_2(t)\end{cases},\ x_1(0)=1\ ,\ x_2(0)=2$$

فرض کنید $X_1=L(x_1(t))$ و $X_2=L(x_2(t))$، از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{cases}SX_1-x_1(0)=X_1-3X_2\\SX_2-x_2(0)=3X_1-5X_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1(s-1)+3X_2=1\\X_2(s+5)-3X_2=2\end{cases}$$

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix}1&3\\2&s+5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-1&3\\-3&s+5\end{vmatrix}}=\frac{s-1}{s^2+4s+4}$$

$$X_2=\frac{\begin{vmatrix}s-1&1\\-3&2\end{vmatrix}}{s^2+4s+4}=\frac{2s+1}{s^2+4s+4}$$

$$X_1+X_2=\frac{3s}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2-2)}{(s+2)^2}\Rightarrow x_1(t)+x_2(t)=3e^{-2t}\ L^{-1}\ \frac{s-2}{s^2}$$

$$x_1(t)+x_2(t)=3e^{-2t}(1-2t)$$

$$x_1(1)+x_2(1)=-3e^{-2}$$

34.دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases},\ y(0)=0\ ,\ x(0)=2$$

1) $y=e^{2t}-e^{-2t}$ و $x=e^{2t}+e^{-2t}$

2) $y=e^{t}-e^{-t}$ و $x=e^{t}+e^{-t}$

3) $y=e^{r\sqrt{2}}-e^{-t\sqrt{2}}$ و $x=e^{t\sqrt{2}}+e^{-t\sqrt{2}}$

4) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}$ و $x=(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)e^{t\sqrt{2}}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-t\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} L\,x' = L\,x + L\,y \\ L\,y' = L\,x - L\,y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX - 2 = X + Y \\ sY = X - Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-1)X - 2 = Y \\ (s+1)Y = X \end{cases}$$

$$Y(s-1)(s+1) - Y = 2 \Rightarrow Y = \frac{2}{s^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{s-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-r\sqrt{2}}$$

$$X = \frac{2(s+1)}{s^2-2} = (1+\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{s-\sqrt{2}} + (1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = (1+\frac{\sqrt{2}}{2})e^{t\sqrt{2}} + (1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-t\sqrt{2}}$$

۶ . ۶ : تابع دلتای دیراک

فرض کنید برای هر $a>0$ ، تابع $h_a(t)$ روی فاصله $[0\,,\infty)$ به وسیله رابطه زیر تعریف شود.

$$h_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & b \le t \le b+a \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

به عبارت دیگر $h_a(t) = \frac{1}{a}[u_b(t) - u_{b+u}(t)]$ توجه کنید که همواره حاصل‌ضرب طول فاصله زمان در اندازه تابع برابر 1 است. حال اگر فاصله زمان (a) خیلی کوچک شود باید اندازه تابع بسیار بزرگ شود و حاصل‌ضرب تابع و زمان (a) وقتی $a \to 0$ برابر 1 باقی ماند. این تابع را ضربه یکه $I(t)$ یا تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ می‌نامند.

تابع دلتای دیراک اغلب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta(t-b) = \lim_{a\to 0} h_a(t) = \begin{cases} 0 & t \ne b \\ \infty & t = b \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-b)dt = 1$$

به سادگی می‌توان نشان داد که:

الف: $\int_0^{\infty} \delta(t-b)dt = 1$

ب: $L[\delta(t-b)] = e^{-bs}$

پ: اگر $g(t)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[0\,,\infty)$ باشد. آن‌گاه برای هر $b \ge 0$ داریم:

$$\int_0^{\infty} \delta(t-b)g(t)dt = g(b)$$

تذکر: با انتخاب $b=0$ داریم:

$\int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1 \;,\; L[\delta(t)] = 1 \;,\; \int_0^{\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0)$

1. اگر $f(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$ ، $\delta(t) = \lim f(t)$ **g(t) یک تابع پیوسته باشد. کدام رابطه صحیح نمی‌باشد؟**

1) $\int_0^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$ 2) $\int_0^{\infty} \delta(t)\,g(t)\,dt = g(0)$

3) $\int_0^{\infty} \delta(t-a)\,g(t)\,dt = g(a)$ 4) $\int_0^{\infty} \delta(t-a)\,g(t)\,dt = g(0)$

حل: با توجه به مطالب بیان شده در متن درس، گزینه (4) صحیح است.

2. **تبدیل لاپلاس** $f(t) = \delta(t-1)\cos t$ **کدام است؟**

1) $e^{s}\cos 1$ 2) $\dfrac{s}{s^2+1}$ 3) $1+\dfrac{s}{s^2+1}$ 4) $e^{-s}(\cos 1)$

حل: با استفاده از فرمول و تعریف تبدیل لاپلاس تابع **f(t)** داریم:

$$L\,f(t) = \int_0^{\infty} e^{-st}\cos t\,\delta(t-1)\,dt$$

با فرض $g(t) = e^{-st}\cos 1$، حاصل انتگرال بالا برابر $g(1)$ می‌باشد. یعنی $L\,f(t) = e^{-s}\cos 1$

۷ ۰ ۶: کانولوشن

تعریف:

کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f\times g)(t)$ نشان داده می‌شود. عبارت است از:

$$(f\times g)(t) = \int_0^{t} f(\lambda)\,g(t-\lambda)\,d\lambda$$

کانولوشن دارای خواص زیر می‌باشد:

الف: $f\times g = g\times f$

ب: $f\times(g+h) = f\times g + f\times h$

پ: $f\times(g\times h) = (f\times g)\times h$

ت: $f\times 0 = 0\times f = 0$

ث: $f\times(ag) = (af)\times g = a(f\times g)$

قضیه:

اگر $F(s) = L[f(t)]$ و $G(s) = L[g(t)]$، آن‌گاه:

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = (f\times g)(t)$$

تعریف:

معادلات انتگرالی، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرال باشد، معادلات دیفرانسیل انتگرالی، معادلاتی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می‌باشند. برای حل این نوع معادلات از قضیه کانولوشن استفاده می‌کنیم، به این معنی که:

$L\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)\,d\lambda = F(s)G(s)$

1. **اگر** $L[f(t)]=F(S)$ **و** $L[g(t)=G(S)$ **باشد. آن‌گاه** $L^{-1}[F(S)G(S)]$ **کدام‌یک از عبارات زیر می‌باشد.**

1) $f(t)g(t)$

2) $\int_0^t f(t)g(y)\,dy$

3) $\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy$

4) $\int_0^t f(y)g(t)\,dy$

حل: طبق تعریف داریم $L\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy = F(S)G(S)$ لذا:

$$L^{-1}[F(S)G(S)] = \int_0^t f(t-y)g(y)\,dy$$

2. **تابع** $f(t)=\underbrace{1*1*\cdots*1}_{n}$ **که در آن * کانولوشن است برابر است با:**

1) $\frac{t^n}{n+1}$

2) $\frac{t^n}{n!}$

3) $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

4) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

حل:

$$1*1=\int_0^t 1\times 1\,d\lambda = t\ ,\ k=2$$

$$t*1=\int_0^t \lambda\times 1\,d\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}\ ,\ k=3$$

$$\frac{t^2}{2}*1=\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2\times 1\,d\lambda = \frac{1}{6}\lambda^3\Big|_0^t = \frac{t^3}{3!}\ ,\ k=4$$

و به ازای $k=n$, $f(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

3. **پاسخ معادله انتگرالی زیر برای** $f(t)$ **چیست؟**

$$f(t)=e^{-t}+\int_0^t (t-T)f(T)\,dT \quad , \quad t\ge 0$$

1) $f(t)=\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^t$

2) $f(t)=(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t)e^{-t}+\frac{1}{4}e^t$

3) $f(t)=\frac{1}{4}e^{-t}+(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t)e^t$

4) $f(t)=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}e^t$

حل:

$$L\,f(t)=L\,e^{-t}+L\int_0^{\infty}(t-T)f(T)\,dT$$

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2}F(s) \Rightarrow F(s)=\frac{s^2}{(s+1)(s^2-1)}$$

$$\frac{s^2}{(s+1)^2(s-1)} \equiv \frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-1}$$

$$\Rightarrow s^2 \equiv A(s-1)+B(s-1)(s+1)+C(s+1)^2$$

$$s=1 \Rightarrow 1=4c \Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

$$s=-1 \Rightarrow 1=-2A \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$s=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}-B+\frac{1}{4} \Rightarrow B=\frac{3}{4}$$

$$F(s)=-\frac{1}{2}\ \frac{1}{(s+1)^2}+\frac{3}{4}\ \frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\ \frac{1}{s-1}$$

گزینه (2) صحیح است.

$$L(t)=L^{-1}F(s)=-\frac{1}{2}e^{-t}t+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}$$

4. **مقدار تابع که در معادله زیر صدق کند کدام است؟**

$$f(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-u)\,f(u)\,du$$

1) $f(t)=t^2+\frac{t^2}{6}$ 2) $f(t)=t^2+\frac{t^2}{12}$ 3) $f(t)=t^2-\frac{t^2}{6}$ 4) $f(t)=t^2-\frac{t^2}{12}$

حل:

$$L[f(t)]=L\,t^2+L\int_0^t \sin(t-u)\,f(u)\,du$$

$$F(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2+1}F(s) \Rightarrow F(s)=\frac{2s^2+2}{s^5}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}$$

$$f(t)=t^2+\frac{t^4}{12}$$

5. **جواب معادله انتگرالی زیر عبارت است از:**

$$y(t)=1-2\int_0^t (t-u)\,y(u)\,du\ ,\ t\ge 0$$

1) $\cos\sqrt{2}t$ 2) $\sin\sqrt{2}t$ 3) $t\cos 2t$ 4) $t\sin 2t$

حل: از طرفین معادله تبدیل، لاپلاس می‌گیریم

$$L\,y(t)=L(1)-2L\int_0^t (t-u)\,y(u)\,du$$

$$L\,y(t)=\frac{1}{s}-2\times\frac{1}{s^2}L\,y(t) \Rightarrow L\,y(t)=\frac{s}{s^2+2}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-} \frac{}{s^2+2} = \cos\sqrt{2}t$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t (t-\lambda)^3 \sin\lambda d\lambda$ برابر است با

1) $\frac{3}{s^4(s^2+1)}$ 2) $\frac{3!}{s^4(s^2+1)}$ 3) $\frac{3}{s^4(s^2-1)}$ 4) $\frac{3!}{s^4(s^2-1)}$

حل:

$$L f(t) = L \int_0^t (t-\lambda)^3 \sin\lambda d\lambda = L(t^3) \times L \sin t$$

$$= \frac{3!}{s^4} \times \frac{1}{s^2+1} = \frac{3!}{s^4(s^2+1)}$$

6. **اگر $x(t)$ جواب معادله** $x(t) = 2 + \int_0^t e^{t-u} x'(u)\,dx$ **باشد. مقدار $x(t)$ در نقطه** $t=5$ **برابر است با:**

1) صفر   2) 1

3) 2   4) 3

حل: از طرفین معادله، لاپلاس می‌گیریم

$$L(x(t)) = L(2) + L\left[\int_0^t e^{t-u} x'(u)\,du\right]$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}[S\,L(x(t)) - x(0)] = \frac{2}{s} + \frac{s \quad (x(t))}{s-1} L \frac{2}{s-1}$$

$$\frac{-1}{s-1} L(x(t)) = \frac{-2}{s(s-1)} \Rightarrow L(x(t)) = \frac{2}{s} \Rightarrow x(t) = 2$$

مثال :جواب عمومی معادله $y' = \frac{x-y}{2x-2y+1}$ **کدام است؟**

1) $x - 2y - Ln(x-y+1) = c$ 2) $x - 2y - Ln(x-y) = c$

3) $2(x-y) + Ln(x-y+1) = c$ 4) $2(x-y) + Ln(x-y) = c$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

قرار دهید $u = x - y$ در این صورت:

$$u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$\Rightarrow 1 - u' = \frac{u}{2u+1} \Rightarrow u' = 1 - \frac{u}{2u+1} = \frac{u+1}{2u+1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{2u+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2u+1}{u+1} du = dx \Rightarrow (2 - \frac{1}{u+1}) du = dx$$

$$\Rightarrow \int (2 - \frac{1}{u+1}) du = \int dx \Rightarrow 2u - Ln(u+1) = x + C$$

مثال :کدام تابع جواب خصوصی معادله $y''-2y'+y=3e^{x}$ است؟

1) $y=\frac{3}{2}xe^{x}$ 2) $y=3xe^{x}$ 3) $y=3x^{2}e^{x}$ 4) $y=\frac{3}{2}x^{2}e^{x}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

چون معادله مشخصه $t^{2}-2t+1=0$ دارای ریشه مضاعف $t=1$ است. لذا جواب خصوصی به فرم $y_{p}=ax^{2}e^{x}$ است.

$$y_{p}=ax^{2}e^{x}\Rightarrow y_{p}''-2y_{p}'+y_{p}=3e^{x}$$

$$y_{p}'=a(x^{2}+2x)e^{x}\Rightarrow y_{p}''=a(x^{2}+2x+2x+2)e^{x}=a(x^{2}+4x+2)e^{x}$$

$$\Rightarrow a(x^{2}+4x+2)-2a(x^{2}+2x)+ax^{2}=3\Rightarrow (4a-4a)x+2a=3$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{2}\Rightarrow y_{p}=\frac{3}{2}x^{2}e^{x}$$

مثال: نقطه $x=0$ برای معادله دیفرانسیل $x^{2}y''+y'\sin x+y\cos x=0$ چه نوع نقطه‌آی است؟

1) عادی 2) عادی نامنظم 3) غیرعادی منظم 4) غیرعادی نامنظم

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$x=0$ یک نقطه غیرعادی است و چون $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$. لذا این نقطه یک نقطه غیرعادی منظم است.

مثال: ضریب x^{2} در بسط مک‌لورن جواب مسئله مقدار اولیه $y(0)=y'(0)=1$ و $y''+y'\sin x+e^{x}y=0$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$y''=-y'\sin x-e^{x}y\Rightarrow y'''=-y''\sin x-y'\cos -e^{x}y-e^{x}y'$$

$$y''(0)=-1\Rightarrow y'''(0)=-1-1-1=-3\Rightarrow x^{2}\ \text{ضریب}=\frac{y'''(0)}{3!}=-\frac{1}{2}$$

مثال :تابع $F(s)=\frac{2}{s^{3}+2s^{2}+2s}$ تبدیل لاپلاس کدام تابع است؟

1) $1-e^{-t}(\cos t+\sin t)$ 2) $1-e^{t}(\cos t+\sin t)$

3) $1+e^{-t}(\cos t+\sin t)$ 4) $1-(\cos t+\sin t)$

$$F(s)=\frac{2}{s((s+1)^2+1)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)=e^{-t}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=e^{-t}\sin t$$

$$L^{-1}(F(s))=2\int_0^t L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)dr=2\int_0^t e^{-r}\sin r dr=-e^{-r}(\cos r+\sin r)\Big|_0^t$$

$$=1-e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

مثال :جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

$$(y\cos x+2xe^y)+(\sin x+x^2e^y+2y)y'=0$$

1) $-y\sin x+x^2e^y+y^2=c$

2) $y\sin x+x^2e^y+y^2=c$

3) $-y\cos x+xe^y+y^2=c$

4) $y\cos x+xe^y+y^2=c$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$(y\cos x+2xe^y)dx+(\sin x+x^2e^y+2y)dy=0$$

$$P(x,y)=y\cos x+2xe^y\ ,\ Q(x,y)=\sin x+x^2e^y+2y$$

معادله کامل است.

$$P_y=\cos x+2xe^y=Q_x=\cos x+2xe^y$$

$$\int Pdx=\int Qdy\Rightarrow\int(y\cos x+2xe^y)dy=\int(\sin x+x^2e^y+2y)dy$$

$$\Rightarrow y\sin x+x^2e^y+f(y)\equiv y\sin x+x^2e^y+y^2+g(x)\qquad(1)$$

$$\Rightarrow f(y)\equiv y^2\ ,\ g(x)=0\qquad(2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow y\sin x+x^2e^y+f(y)=c$

$$f(y)=y^2\Rightarrow y\sin x+x^2e^y+y^2=c$$

مثال:جواب معادله دیفرانسیل $y''+y'^3e^{3y}=0$ کدام است؟

1) $3x-e^{3y}=c_1y+c_2$

2) $3x+e^{3y}=c_1y+c_2$

3) $9x-e^{3y}=c_1y+c_2$

4) $9x+e^{3y}=c_1y+c_2$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

در معادله متغیر x ظاهر نشده بنابراین تغییر متغیر $y'=p$ و $y''=p\frac{dp}{dy}$ را اعمال می‌کنیم.

$$p\frac{dp}{dy}+p^3e^{3y}=0 \Rightarrow pdp=--^3\, e^{3y}dy \Rightarrow -\frac{dp}{p^2}=e^{3y}dy$$

$$\Rightarrow \int -\frac{dp}{p^2}=\int e^{3y}dy \Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{1}{3}e^{3y}+a\ ,\ p=y'$$

معادله جدایی‌پذیر

$$\Rightarrow y'(\frac{1}{3}e^{3y}+a)=1 \Rightarrow (\frac{1}{3}e^{3y}+a)dy=dx$$

$$\Rightarrow \int (\frac{1}{3}e^{3y}+a)dy=\int dx \Rightarrow \frac{1}{9}e^{3y}+ay=x+b$$

$$\Rightarrow e^{3y}+9ay=9x+9b \Rightarrow 9x-e^{3y}=9ay-9b=c_1y+c$$

مثال :جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'''-2y''+3y'-2y=2e^x$ **کدام است؟**

1) $y_p=xe^x$ 2) $y_p=\frac{1}{2}xe^x$ 3) $y_p=\frac{1}{2}x^2e^x$ 4) $y_p=x^2e^x$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$(D^3-2D^2+3D-2)y=2e^x$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{2e^x}{D^3-2D^2+3D-2}=\frac{2e^x}{(D-1)(D^2-D+2)}=\frac{2xe^x}{1!(1-1+2)}=xe^x$$

توجه :

$$\frac{1}{(D-a)^kP(D)}e^{ax}=\frac{x^ke^{ax}}{k!P(a)}$$

مثال:جواب معادله دیفرانسیل $4y^3y'+y=2xy'$ **با شرط اولیه** $y(1)=1$ **کدام است؟**

1) $x^2=\frac{y}{5-4x}$ 2) $x^2=\frac{y}{5+4x}$ 3) $y^2=\frac{x}{5-4y}$ 4) $y^2=\frac{x}{5+4y}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

معادله دیفرانسیل مورد نظر یک معادله خطی برحسب x نسبت به متغیر y است.

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-4y^2\ ,\ f(y)=-\frac{2}{y}\ ,\ q(y)=-4y^2$$

جواب عمومی

$$x=e^{-\int f(y)dy}(\int q(y)e^{\int f(y)dy}dy+c)$$

$$\Rightarrow x=e^{\int\frac{2}{y}dy}(\int -4y^2e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+c)=e^{2Lny}(\int -4y^2e^{-2Lny}dy+c)$$

$$= y^2(\int -4dy + c) \Rightarrow x = y^2(-4y + c) \Rightarrow y^2 = \frac{x}{c-4y}$$

با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه (3) صحیح است.

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{c-4} \Rightarrow c-4 = 1 \Rightarrow c = 5$$

جواب خصوصی

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x}{5-4y}$$

مثال :معادله دیفرانسیل $t^2y'' + aty' + by = 0$ داده شده که در آن a و b ثابت‌های حقیقی هستند. به ازای کدام ثابت‌های a و b معادله دیفرانسیل دارای جواب‌های نوسانی است؟

1) $b > (a-1)^2$ 2) $4b > (a-1)^2$

3) $4b < (a-1)^2$ 4) چنان ثابت a و b ای وجود ندارند.

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله یک معادله کُشی – اویلر بوده که دارای معادله شاخص $r^2 + (a-1)r + b$ می‌باشد. جواب‌ها زمانی نوسانی هستند که $\Delta < 0$ باشد. بنابراین داریم:

$$\Delta = (a-1)^2 - 4b \Rightarrow (a-1)^2 < 4b$$

مثال :معادله دیفرانسیل $y'(\sin y + \frac{y}{\cos y}) = -\pi \sin x \cos x \cos y$ مفروض است. جوابی که از نقطه $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{4})$ عبور می‌کند. به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ دارای کدام مقدار y است؟

1) صفر 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$(\sin y + \frac{y}{\cos y})dy + \pi \sin x \cos x \cos y \, dx = 0$$

$$P = \pi \sin x \cos x \cos y \ , \ Q = \sin y + \frac{y}{\cos y}$$

معادله کامل نیست.

$$P_y = -\pi \sin x \cos x \sin y \ , \ Q_x = 0 \Rightarrow P_y \neq Q_x$$

برای کامل کردن معادله عامل انتگرال‌ساز مناسبی پیدا می‌کنیم.

$$f(y)=\frac{[illegible]}{-P}=\frac{[illegible]}{-\pi\sin x\cos x\sin y}=\tan y$$

$$\Rightarrow F(y)=e^{\int f(y)dy}=e^{\int \tan y\,dy}=e^{-\mathrm{Ln}\cos y\,dy}=\frac{1}{\cos y}$$

با ضرب $\mu=\dfrac{1}{\cos y}$ در طرفین معادله، یک معادله کامل به دست می‌آید.

$$\Rightarrow (\tan y+\frac{y}{\cos^2 y})\,dy+\pi\sin x\cos x\,dx=0$$

$$\Rightarrow \int p dx=\int Q dy\Rightarrow \int \pi\sin x\cos x\,dx=\int(\tan y+\frac{y}{\cos^2 y})\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin^2 x+g(y)=y\tan y+h(x)$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{\pi}{2}\sin^2 x\ ,\ g(y)=y\tan y$$

جواب عمومی

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin^2 x+g(y)=c\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin^2 x+y\tan y=c$$

جواب خصوصی

$$y(0)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow c=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin^2 x+y\tan y=\frac{\pi}{4}$$

$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}+y\tan y=\frac{\pi}{4}\Rightarrow y\tan y=0\Rightarrow y=0$$

مثال :از معادله دیفرانسیل $ty''+(1-t)y'+ny=0$ **تبدیل لاپلاس می‌گیریم.** $Y(s)=L\{y(t)\}$ **کدام است؟**

1) $\dfrac{s^n}{(s-1)^{n+1}}$ 2) $\dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$ 3) $\dfrac{(s-1)^n}{n!s^{n+1}}$ 4) $\dfrac{n!(s-1)^n}{s^{n+1}}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$L[ty'']+L[y']-L[ty']+n\,L[y]=0$$

$$\Rightarrow -[s^2Y-sy(0)-y'(0)]'+sY-y(0)+[sY-y(0)]'+nY=0$$

$$\Rightarrow -s^2Y-2sY+y(0)+sY-y(0)+sY'+Y+nY=0$$

$$\Rightarrow (s-s^2)Y'+(n+1-s)Y=0$$

معادله جدایی‌پذیر

$$\Rightarrow \frac{Y'}{Y}=\frac{n+1-s}{s^2-s}\Rightarrow \mathrm{Ln}Y=\int\frac{n+1-s}{s^2-s}ds$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}Y=n\mathrm{Ln}(s-1)-(n+1)\mathrm{Ln}s=\mathrm{Ln}\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\Rightarrow Y=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

حل این نمونه معادلات را در قالب سوال‌های زیر توضیح خواهیم داد.

سوال (۱)- جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید؛

$$\begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx}=3y_1+2y_2 \\ x\dfrac{dy_2}{dx}=-2y_1-2y_2 \end{cases}$$

حل: اگر از معادله اول دستگاه نسبت به x مشتق بگیریم و بین معادلهٔ حاصل و دو معادلهٔ دستگاه y_2 , $\dfrac{dy_2}{dx}$ را حذف کنیم به ترتیب داریم:

$$\frac{dy_1}{dx}+x\frac{d^2y_1}{dx^2}=3dy_1+2\frac{dy_2}{dx}$$
$$=3\frac{dy_1}{dx}+2\left[-\frac{2}{x}(y_1+y_2)\right]$$

یا

$$x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}-2x\frac{dy_1}{dx}=-4y_1-4y_2$$

از دستگاه و معادلهٔ اول داریم؛

$$-2y_2=3y_1-x\frac{dy_1}{dx}$$

سپس بنابراین داریم:

$$x^2\frac{d^2y_1}{dx^2}-2y_2=0 \qquad \text{(I)}$$

این یک معادلهٔ خطی مرتبه دوم کوشی – اویلر است، برای حل آن قرار می‌دهیم $y_1=x^2$ سپس نتیجه می‌گیریم $\dfrac{dy_1}{dx}=rx^{r-1}$ و $\dfrac{d^2y_1}{dx^2}=r(r-1)x^{r-2}$ پس از جایگزاری در معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود:

$$r(r-1)-2=0\rightarrow\begin{cases} r_1=-1 \\ r_2=2 \end{cases}$$

چون جواب‌های یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم تشکیل یک فضای برداری می‌دهند بنابراین می‌توان نوشت:

$$y_1 = c_1\frac{1}{x} + c2x^2$$

c_1 و c_2 دو مقدار ثابت دلخواه اند.

از طرف دیگر؛

$$y_2 = \frac{1}{2}(x\frac{dy_1}{dx} - 3y_1) = \frac{1}{2}(-c_1\frac{1}{x} + 2c_2x^2 - 3c_1\frac{1}{x} - 3c_2x^2)$$

از آنجا؛

$$y_2 = -2c_1\frac{1}{x} + \frac{c_2}{2}x^2$$

بنابراین جواب عمومی دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{c_1}{x} + c2x^2 \\ y_2 = \dfrac{-2c_1}{x} - \dfrac{c_2}{2}x^2 \end{cases}$$

که به دو ثابت دلخواه C_1 و C_2 بستگی دارد.

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

الف) تعریف؛ هر دستگاه معادلات به صورت؛

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots. + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

که در آن توزیع $a_{iy}(n)$ و $bi(x)$ روی زیر مجموعهٔ I از R پیوسته فرض می‌شوند یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی نامیده می‌شود.

با استفاده از نمایش ماتریسی، می‌توان دستگاه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dyn}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots a_{2n}(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots . a_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x) \end{bmatrix}$$

با قرار دادن

$$B\begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x) \end{bmatrix}, A(x) = [a_{ij}(x)], \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dy_n}{3x} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود که؛

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B$$

درا ین جا نیز مانند معادلات دیفرانسیل خطی می‌توان نشان داد که؛

جواب عمومی دستگاه $\frac{dy}{dx} = Ay + B$ برابر است با مجموع جواب عمومی دستگاه بدون طرف دوم یعنی $\frac{dy}{dx} = Ay$ و یک جواب خصوصی دستگاه.

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، فرض می‌کنیم در دستگاه $\frac{dy}{dx} = Ay$ عناصر ماتریس A ثابت باشند.

می توان ماتریس $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ را به عنوان مولفه‌های یک بردار y در فضای برداری E_n مجهز به پایهٔ $(e_1, e_2, ..., e_n)$ در نظر

گرفت، بنابراین نمایش ماتریسی $\frac{dy}{dx}=Ay$ هم از نمایش برداری $\frac{dy}{dx}=f(y)$ می‌شود که در آن f آندونیسم E_n به ماتریس

A در پایه (ei) است.

سوال: جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید؛

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx}=y_1+5y_2 \\ \frac{dy_2}{dx}=y_1-3y_2 \end{cases}$$

حل: ماتریس این دستگاه عبارت است از؛

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ آن ریشه‌های معادله فوق است؛

$$\begin{vmatrix} 1-r & 5 \\ 1 & -3-r \end{vmatrix}=0$$

یا $r^2+2r-8=0$ می‌باشند بنابراین $r_1=2$ و $r_2=-4$ در نتیجه دستگاه به صورت زیر تبدیل می‌شود؛

$$\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dx} \\ \frac{dz_2}{dx} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} z_1=c_1e^{2x} \\ z=c_2e^{-4x} \end{cases}$$

از طرف دیگر از معادله $(1-r)u_1+5u_2=0$ می‌توان بر داده‌های ویژهٔ مربوط به r_1 و r_2 را به دست آورد. به ازای $r_1=2$ داریم $562+u_1-u_1=0$ از آنجا یک بردار ویژهٔ $V_1(5,1)$ و به ازای $r2=-4$ داریم $5u_1+5u_2=0$ و از آنجا یک بردار ویژه دیگر $V_2=(1,-1)$ در نتیجه ماتریس تعویض پایه عبارت است از؛

$$P=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

از آنجا داریم؛

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 5c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} \\ y_2 = c_1e^{2k} - c2e^{-4x} \end{cases}$$

روش عملگری حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این روش با استفاده از عملگر مشتق و نماد $D = \dfrac{d}{d_2}$ و $D^2 = \dfrac{d^2}{dt^2}$ .... $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ معادلات دستگاه را به صورت معادلات عملگری می‌نویسید؛ در حالت کلی اگر 2_1 و 2_2 ... معادلاد دیفرانسیل عملگری یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با دو متغیر x و y باشند آنگاه می‌توان دستگاه را به صورت

$$L3x + L4y = g_2(t), \quad L_{(x)}L_{2y} = g_1(t) \qquad (1)$$

نوشت، از حذف متغیر y در دستگاه بالا به معادله $(L_1L_4 - L_2L_3)x = f_1(t)$ و از حذف متغیر x به $(L_1L_4 - L_2L_3)y = f_2(t)$ می‌رسیم که در آن $f_1(t) = L_4g_1(t) - K_2g_2(t)$ و $f_2(t) = L_1g_2(t) - L_3g_1(t)$ که با توجه به تعریف دترمینان می‌توان x و y را چنین به دست آورد.

$$x - \frac{\begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}}$$

اگر **0** $\neq$ (مخرج) det آنگاه از دستگاه (1)

-) در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه n بر حسب x و y به دست می‌آید.

-) معادلهٔ کمکی و جواب عمومی هر کدام از این معادلات یکسان است.

-) چون هر کدام از x و y بر حسب n پارامتر هستند در جواب کلی 2n پارامتر پدیدار می‌شود.

-) تعداد کل پارامترهای مستقل در جواب دستگاه n تاست.

اگر **0**= (مخرج) det آنگاه ممکن است دستگاه بدون جواب باشد یا آنکه تعداد ثابت‌های آن دلخواه باشد، موارد بیان شده در بالا مورد هر دستگاه معادلات دیفرانسیل برقرار است.

سوال؛ دستگاه $\begin{cases} x' = 3x - y - 1 \\ y' = x + y + 4et \end{cases}$ **را حل کنید.**

حل؛ معادلات عملگری این دستگاه عبارتند از؛

$$\begin{cases} (D-3)x + y = -1 \\ -x + (D-1)y = 4e^t \end{cases}$$

بنابراین؛

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 4e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix}}, x=\frac{\begin{vmatrix} 4e^t & D-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix}}$$

سپس داریم؛

$$(D-2)^2 Y-1-8e^t, (D-2)^2 x=1-4e^b$$

جواب عمومی معادلات همگن متناظر با معادلات بالا یکسان و به صورت $c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$ با استفاده از روش ضرایب نامعین می‌توان x_p، y_p را نیز به دست آورد، بنابراین

$$\begin{cases} x=x_c+x_p=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}-4e^t+\frac{1}{4} \\ y=y_c+y_p=c_3e^{2t}+c_4te^{2t}-8e^t-\frac{1}{4} \end{cases}$$

اگر این دو جواب را در معادله دوم دستگاه قرار دهیم؛ پارامترهای وابسته خطی حذف می‌شوند.

$$y'-x-y-4et=(c_3-c_1+c_4)e^{2t}+(c_4-c_2)te^{2t}=0$$

که در آن $c_4 = c_2$ و $c_3 = c_1 - c_4 = c_1 - c_2$ نتیجه می‌شود، بنابراین جواب عمومی دستگاه با دو پارامتر ثابت برابر است با

$$\begin{cases} y(t)=(c_1-c_2)e^{2t}+c_2te^{2t}-\frac{1}{4}-8e^t \\ x(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+\frac{1}{4}-4e^t \end{cases}$$

روش لاپلاس برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

هر گاه شرایط اولیه معلوم باشند، روش تبدیل لاپلاس، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را به یک دستگاه معادلات جبری بر حسب توابعی از S تبدیل می‌کند.

سوال: جوابی از دستگاه $\begin{cases} x_1''+1ex_1-4x_2=0 \\ -4x_1+x_2''+4x_2=0 \end{cases}$ **بیابید که شرایط زیرا را برآورد** $\begin{cases} x_1(0)=x_2(0)=0 \\ x_1'(0)=1, x_2'(0)=-1 \end{cases}$

حل؛ پس از تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله به دست می‌آوریم؛

$$\begin{cases} S^2x_1(x)+1ex_1(S)-4x_2(S)-Sx_1(0)-x'(0)=0 \\ -4x_1(S)+S^2x_2(S)+4x_2(S)-S_{x_2}(0)-x_2'(0)=0 \end{cases}$$

و با قرار دادن شرایط اولیه نتیجه می‌گیریم؛

$$-4x_1(S)+(S^2+4)x_2(4)=-1$$

از حذف $X_2(4)$ به دست می‌آوریم:

$$X_1(4)=\frac{S^2}{(S^2+2)(S^2+12)}=\frac{AS+B}{S^2+2}+\frac{CS+D}{S^2+12}$$

و با متحد قرار دادن ضرایب توان‌های مساوی S در رابطه

$$S^2=(AS+B)(S^2+12)+(CS+D)(S^2+2)$$

به دست می‌آید $A=0=C$ و $D=6/5$ و $B=-1/5$ بنابراین؛

$$X_1(S)=\frac{-1/5}{S^2+2}+\frac{6/5}{S^2+12}$$

پس از تبدیل معکوس گرفتن

$$x_1(t)=\frac{-1}{10}\sin t+\frac{1}{5}\sin 2t$$

از حذف $X_1(s)$ و از معادله اول دستگاه نتیجه می‌شود؛

$$x_2(S)=-\frac{S^2+6}{(S^2+2)(S^2+12)}=\frac{-2/5}{S^2+2}-\frac{3/5}{S^2+12}$$

اگر از طرفین رابطه بالا مبدل معکوس بگیریم آنگاه؛

$$x_2(t)-\frac{1}{5}\mathrm{Sint}-\frac{1}{10}\sin(2t)$$

سوال؛ جواب عمومی دستگاه معادلات $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+2x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2\end{cases}$ **را بیابید.**

حل؛ معادله مشخصه $\det(A-KI)=(2-K)(3-K)-2=0$ یا $K^2-5+4=0$ که ریشه هایش $K_1=1$ و $K_2=4$ می‌باشد، از حل دستگاه $(A-KI)(\alpha)=0$ به ازای این مقادیر k به دست می‌آوریم؛

به ازای $k_1=1$: $\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ نتیجه می‌شود a_1-2a_2، اگر $a_2=1$ آنگاه $a_1=-2$ و $a_1=\begin{bmatrix}-2\\+1\end{bmatrix}$ به ازای $k_2=4$ $\begin{bmatrix}-2&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ یا $a_1=a_2$ پس $a_1=1$ آنگاه $a_2=1, a_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

بنابراین جواب عمومی دستگاه برابر است با؛

$$x=c_1\alpha_1e^t+c_2\alpha_2e^{4t}=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{4t}$$

معادلات خطی همگن $(A - KiI)\alpha_i = 0$ را تشکیل می‌دهیم چون دترمینان این دستگاه صفر است، بعضی از معادلات دستگاه تکراری یا وابسته خطی به بعضی دیگر از معادلات دستگاه هستند، به عبارت دیگر دستگاه حتماً جواب ناصفر دارد، بنابراین جواب عمومی برابر است با؛

$$X = c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\alpha_2 e^{k2t} + \ldots + C_n\alpha_n e^{knt}$$

در سوال بعد مقادیر ویژه ماتریس A اعداد مختلط و متمایز $p \pm iq$ هستند. در اینجا دستگاه معادلات خطی همگن $(A - (p \pm iq)I)\alpha = 0$ را حل می‌کنیم این دستگاه نیز به سبب داشتن معادلات وابسته خطی، حتماً جواب ناصفر دارد، معمولاً از تفکیک قسمت‌های حقیقی و موهولی α، جواب عمومی دستگاه به دست می‌آید.

سوال: جواب عمومی دستگاه معادلات $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2 \end{cases}$ **را بیابید.**

حل؛ معادله مشخصه ماتریس A؛

$$\det(A - KI) = (-7 - K)(-5 - K) + 2 = 0$$

$\begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ یا $2a1 = (1-i)a_2$ اگر $a_2 = 2$ آنگاه $a_1 = 1-i$ و $\alpha = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix}$ بنابراین

$$x = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-6+i)t} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix} e^{-6t}(\cos t + i\sin t)$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos t + \sin t)e^{-6t} \\ 2(\cos t)e^{-6t} \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{-6t}(-(o)t + \sin t) \\ e^{-6t}(2\sin t) \end{bmatrix}$$

و جواب عمومی دستگاه برابر خواهد بود با؛

$$x = c_1 e^{-6t}\begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 e^{-6t}\begin{bmatrix} -\cos t + \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

و حالت سوم که در سوال زیر مطرح می‌شود این است که ویژه A حقیقی اند و بعضی از آنها از مرتبه تکرار m هستند، در این جا در حالت تشخیص می‌دهیم:

سوال: دستگاه معادلات $x' = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} x$ **را حل کنید؛**

حل: معادله مشخصه A به صورت $(\lambda + 3)^2 = 0$ بنابراین $\lambda = -3$ مقدار ویژه از مرتبه تکرار 2 است، از حل دستگاه $(A + 3I)\alpha = 0$ به دست می‌آید $\alpha = <3,1>^t$ یک جواب دستگاه $x_1 = <3,1> e^{-3t}$ بنابراین برای یافتن β دستگاه $(A + 3I)\beta = \alpha$ را حل می‌کنیم.

که از آن معادله $\begin{bmatrix} & \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ 1 \end{bmatrix}$ $b_1-3b_2=\frac{1}{2}$، اگر $b_2 = 0$ آنگاه b_1 =1/2 بنابراین $\beta=21/2/e>^{t}$ و

$$x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

و جواب عمومی برابر است با

$$x = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix} 3t+1/2 \\ t \end{bmatrix} e^{-3t}$$

اگر مقدار ویژه A از مرتبه تکرار 3 باشد ولی یک بردار ویژه متناظر با آن وجود داشته باشد آنگاه جواب‌های دوم و سوم دستگاه عبارتند از:

$$\begin{cases} x_2 = \alpha te^{k1t} + \beta e^{klt} \\ x_3 = \alpha \frac{t^2}{2} e^{k/t} + \beta te^{k/t} + \gamma e^{k/t} \end{cases}$$

که γ, β, α بردارهای ویژه مستقل خطی هستند که به ترتیب از حل دستگاه‌های $(A - K_1I)\alpha = 0$ و $(A - K_1I)\alpha = \beta$ و $(A - K_1I)\beta = \gamma$ به دست می‌آیند.

سوال؛ جواب عمومی دستگاه ناهمگن زیر را بیابید:

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا دستگاه همگن متناظر با آن را حل می‌کنیم؛ معادله مشخصه ماتریس ضرایب برابر است با:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0$$

بنابراین $\lambda 1 = -2$ و $\lambda_2 = -5$ و بردارهای ویژه متناظر با آن به ترتیب عبارتند از:

$$k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

بنابراین ماتریس اصلی

$$\phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{5t} \end{bmatrix} \times \frac{1}{3}$$ و معکوس آن $$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

است بنابراین جواب خصوصی از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$X_P = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)\,F(t)\,dt$$

$$=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{bmatrix}\int\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e\cdots & \cdots \\ e^{5t} & -e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ e^{-t}\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{bmatrix}\int\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2te^{2t} & +\frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} & -\frac{1}{3}e^{tt}\end{bmatrix}dt$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{t} \\ t\frac{1}{5}e^{5t}-\frac{1}{25}e^{5t}-\frac{1}{12}e^{4t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

بنابراین جواب عمومی دستگاه غیر همگن به صورت زیر نتیجه می‌شود؛

$$x_p=\phi(t)c+\phi(t)\int\phi^{-1}(t)F(t)dt$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}e^{-2t}+c2\begin{bmatrix} 1 \\ -2\end{bmatrix}e^{-5t}+\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}t-\begin{bmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}e^{-t}$$

تست – دستگاه معادلات $\begin{cases} x'=3y \\ y'=2x\end{cases}$ **دارای کدام جواب است؟**

الف) $\begin{cases} y=c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ x=c_3e^{t}+c_4e^{-t}\end{cases}$

ب) $\begin{cases} y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t} \\ x=c_3e^{-3t}+c_4e^{3t}\end{cases}$

ج) $\begin{cases} y=c_1e^{-2t}+c2e^{t} \\ x=c36e^{t}+c4e^{-3t}\end{cases}$

د) $\begin{cases} y=c_1e^{-2t}+c3e^{-4t} \\ x=c_3e^{3t}+c_4e^{t}\end{cases}$

حل؛ گزینه (1) صحیح است. با استفاده از عملگرد داریم:

$$\begin{cases} 2x-Dy=0 \\ D_x-3y=0\end{cases}$$

اگر معادله دوم را در (2-) ضرب کرده و با مشتق معادله اول جمع کنیم معادله $D^2y-6y=0$ به دست می‌آید و اگر مشتق معادله دوم را از 3 برابر معادله اول کم کنیم به $-D^2x+6x=0$ می‌رسیم. که ±1 ریشه‌های معادله کمکی است پس

$$\begin{cases} y=c_1e^{t}+c_2e^{-t} \\ x=c_3e^{t}+c_4e^{-t}\end{cases}$$

۱- از دستگاه $x(0)=y(0)=0$, $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$ مقدار $y(t)$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{2}e^t - \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t$

ب) $\frac{5}{3}e^t - \frac{5}{3}\cos t + \frac{5}{3}\sin t$

ج) $\frac{5}{2}e^t + \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{3}\sin t$

د) $\frac{5}{2}e^t + \frac{5}{3}\cos t - \frac{5}{3}\sin t$

۲- از دستگاه $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$ مقدار $x(t)$ کدام است.

الف) $x(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t}$

ب) $x(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$

ج) $x(t) = c_1^{3t} + c_2e^{-2t}$

د) $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t}$

۳- یک جواب خصوصی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + et \\ x_2' = x_1 + 4x_2 + 1 \end{cases}$ کدام است؟

الف) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(3t-1)e^t + \frac{3}{y} \\ x_2 = \frac{-1}{2}te^t + \frac{2}{y} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(3t-1)e^t + \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{3}{5}te^t - \frac{2}{5} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}te^t + \frac{3}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{3}(3t-1)e^t - \frac{2}{5} \end{cases}$

د) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3t-1)e^t + \frac{3}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{4}te^t - \frac{2}{5} \end{cases}$

۴- در دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر جواب خصوصی $x_2(t)$ کدام است؟

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5et \\ 5 \end{bmatrix}$$

الف) $\frac{5}{6}e^t + \frac{5}{2}$

ب) $\frac{-5}{6}e^t + \frac{5}{2}$

ج) $-\frac{5}{2}e^t + \frac{5}{4}$

د) $\frac{5}{2}e^t + \frac{5}{4}$

۵- جواب معادله $x(t)=\sin t+2\int_{0} \sin(2t-2x)x(a)du$ کدام است؟

الف) $x(t)=4t-3\cos t$

ب)

$x(t)=4t+3\cos t$

ج) $x(t)=4t+3\sin t$

د) $x(t)=4t-3\sin t$

۶- جواب معادله انتگرال – دیفرانسیل زیر تحت شرایط اولیه داده شده کدام است؟

$$\begin{cases} x''(t)=e^{2t}-\int_{0}^{t} e^{2(t-u)}du \\ x(e)=u'(e)=0 \end{cases}$$

الف) $x(t)=te^{-t}-e^{-t}+1$

ب) $x(t)=te^{t}-e^{t}+1$

ج) $x(t)=e^{t}-te^{t}-1$

د) $x(t)=e^{-t}-te^{-t}-1$

۷- جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} x'=3x-y \\ y'=4x-y \end{cases}$ برای $y(t)$ چه جوابی به دست می‌آید؟

الف) $y(t)=c_1e^{t}+2c_2e^{-t}$

ب) $y(t)=2c_1e^{t}+c_2(2t+1)e^{t}$

ج) $y(t)=c_1e^{-t}+2c_2e^{-2}t$

د) $y(t)=2c_1e^{t}+c_2(2t-1)e^{t}$

۸- جواب دستگاه معادله دیفرانسیل $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-2y \end{cases}$ کدام است؟

الف) $\begin{cases} x=c_1e^{-2t}+c_2e^{3t} \\ y=-4c_1e^{-2t}+c_2{}^{3t} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t} \\ y=-4c_1e^{-3t}+c_2e^{2t} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} k=c_1e^{t}+c_2e^{2t} \\ y=-2c_1e^{-t}+c_2e^{2t} \end{cases}$

د) $\begin{cases} x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t} \\ y=-2c_1e^{-t}+c_2e^{3t} \end{cases}$

۱- گزینه (۱) صحیح است.

از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} sx - x(0) = 3x - 2y + \dfrac{1}{s-1} \\ sy - y(0) = 5x - 3y \end{cases}$$

با حل دستگاه جبری بالا داریم:

$$y = \frac{5}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{5}{2}.\frac{1}{s-1} - \frac{5}{2}.\frac{s}{s^2+1} - \frac{5}{2}.\frac{1}{s^2+1}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}e^t - \frac{5}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t$$

۲- گزینه (۲) صحیح است.

دستگاه را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (1-m)A + B = 0 \\ 4A + (-2-m)B = 0 \end{cases}$$

معادله کمکی چنین است:

$$(1-m)(-2-m) - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -3 \\ m_2 = 2 \end{cases}$$

با $m = -3 \Rightarrow A = 1, B = -4$

$$x = e^{-3t}, y = -4e - 3t$$

$$m = +2 \Rightarrow A = 1, B = 1$$

$$x = e^{2t}, y = e^{2t}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = -4c_3 e^{-3t} + c_4 e^{2t} \end{cases}$$

۳- گزینه (۴) صحیح است.

ریشه‌های معادله مشخصه دستگاه همگن عبارت است از $\lambda = 5, \lambda = 1$ پس جواب خصوصی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_1 = (At + B)e^t + c \\ x_2 = (Dt + E)e^t + F \end{cases}$$

با قرار دادن این جواب‌ها در معادله با فرض E_0 و حل دستگاه به وجود آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A=\frac{}{4}, B=-\frac{}{4}, C=\frac{}{5} \\ D=-\frac{1}{4}, E=\mathbf{0}, F=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

۴- گزینه (۳) صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

که از آن $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 4$ به دست می‌آید و بردار ویژه متناظر با $\lambda = -1$

$$(1+1)u_1 + 2u_2 = \mathbf{0}$$

که از آن امتداد $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید پس $x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$ و به همین شکل برای $\lambda = 4$ داریم:

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_e 4t$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{bmatrix}$$

بردار ستونی $f(t)$ به شکل $f(t) = \begin{bmatrix} 5et \\ 5 \end{bmatrix}$ است.

$$Q^{-1}(t)f(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} & -2e^{t} \\ e^{-3t} & +e^{-4t} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \nabla \quad (t) = \int Q^{-1}(t) t f(t) dt$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{2t} & -2e^{t} \\ -\frac{1}{3}e^{-3t} & -\frac{1}{4}e^{-4t} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جواب خصوصی}} x_p(t) = \varphi(t)v(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}e^{t} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2}e^{t} & +\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

۵- گزینه (۴) صحیح است.

از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

با فرض $f(t) = x(t)$ و $g(t) = \sin^2 t$ و استفاده از قضیه پیچش داریم:

$$L\{x)t)\} = \frac{1}{s^2+1} + 2L\{x(t)\}L\{\sin 2t\}$$

$$x(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2x(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$x(s) = \frac{s^2+4}{s^2(s^2+1)} = \frac{4}{s^2} - \frac{3}{s^2+1}$$

$\Rightarrow x(t)=L^{-1}[X(t)]=$ [illegible]$t-$[illegible]$\sin t$

۶- گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به تبدیل لاپلاس داریم:

$$s^2\times(s)=\frac{1}{s-2}-(\frac{1}{s-2})s\times(s)$$

$$x(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{x(s)\}=x(t)=1-e^t+te^t$$

۷- گزینه (۴) صحیح است.

$$\begin{cases}(3-\lambda)A-B=0\\4A+(1-\lambda)B=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=1\\ \end{cases}$$

$$\lambda=1\Rightarrow 2A-B=0\rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=e^t\\y_1=2et\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=(At+B)e^t\\y_1=(ct+D)e^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,B=0\\C=2,D=-1\end{cases}$$

$$y(t)=2c_1e^t+c_2(2t-1)e^t$$

۸- گزینه (۲) صحیح است.

$$\begin{vmatrix}1-m & 1\\4 & -2-m\end{vmatrix}=0\rightarrow\begin{cases}m_1=2\\m_2=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1-m)A+B=0\\4A+(-2-m)B=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=1,A=1\\B=-4,B=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}\\y=-4c/e^{-3t}+c_2e^{2t}\end{cases}$$

1. **جواب معادله دیفرانسیل** $\cos(x+y)dx = x\sin x(x+y)dx + x\sin(x+y)dy$ **، کدام‌یک از موارد داده شده می‌باشد؟**

1) $x\cos(x+y)=c$

2) $y\cos(x+y)=c$

3) $x\sin(x+y)=c$

4) $y\sin(x+y)=c$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$u = x+y \Rightarrow dy = du - dx$$

$$\cos u\ dx = x\sin\ udx + (x\sin u)(du-dx)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sin u}{\cos u}du \Rightarrow \mathrm{Ln}x + \mathrm{Ln}\cos u = \mathrm{Ln}C \Rightarrow x\cos(x+y)=C$$

2. **جواب معادله زیر با شرایط اولیه داده شده کدام است؟**

$$y' = \frac{xh^2 - \sin x\cos x}{y(1-x^2)}\ ;\ y(0)=2$$

1) $y^2(1-x^2)+\sin^2 x = 2$

2) $y^2(1-x^2)+\cos^2 x = 3$

3) $y^2(1-x^2)+\sin^2 x = 4$

4) $y^2(1-x^2)-\cos^2 x = 5$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

(معادله برنولی)

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = -\frac{\sin x\cos x}{(1-x^2)}y^{-1}$$

$$yy' - \frac{x}{1-x^2}y^2 = -\frac{\sin 2x}{2(1-x^2)}\ ,\ u = y^2 \Rightarrow u' = 2yy'$$

(معادله خطی مرتبه اول)

$$u' - \frac{2}{1-x^2}u = -\frac{\sin 2x}{1-x^2}$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}dx = \mathrm{Ln}(1-x^2)$$

$$u = \frac{1}{1-x^2}\left(\int -\frac{\sin 2x}{1-x^2}(1-x^2)dx + c\right)$$

$$2y^2(1-x^2) = 1-2\sin^2 x + 7 \Rightarrow y^2(1-x^2)+\sin^2 x = 4$$

$$y(0)=2 \Rightarrow 4=\frac{\ }{2}+C \Rightarrow C=\frac{\ }{2}$$

3. کدام گزینه جواب معادله دیفرانسیل $y''+y'^3e^{2y}=0$ است؟

1) $x=y+c_1e^{2y}+c_2$ 2) $y=c_1x+\frac{1}{4}e^{2y}+c_2$

3) $y=x+c_1e^{2y}+c_2$ 4) $x=c_1y+\frac{1}{4}e^{2y}+c_2$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

معادله فاقد متغیر می‌باشد.

$$y'=P \qquad y''=P\frac{dP}{dy} \Rightarrow P\frac{dP}{dt}+P^3e^{2y}=0 \Rightarrow \frac{dP}{P^2}+e^{2y}dy=0$$

$$-\frac{1}{P}+\frac{1}{2}e^{2y}=C_1 \Rightarrow (C_1+\frac{1}{2}e^{2y})dy=dx$$

$$C_1\,y+\frac{1}{4}e^{2y}=x+C \Rightarrow x=C_1y+\frac{1}{4}e^{2y}+C_2$$

4. تبدیل لاپلاس جواب معادل زیر کدام است؟

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\frac{dy}{dt}+y=0\ ,\ t>0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1$$

1) $\frac{s-1}{s2}$ 2) $\frac{1}{s^2}$ 3) $\frac{s}{s^2-1}$ 4) $\frac{1}{s^2-1}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$L\ (ty'')+L\ y'-\ L\,(ty'')+\ L\ \ y=0$$

$$-(S^2Y-Sy(0)-y'(0))'+(SY-y(0))+(SY-y(0))'+Y=0$$

$$-(2SY+S^2Y'-1)+SY-1+SY'+Y+Y=0$$

$$Y'(S^2-S)+Y(S-2)=0$$

$$\frac{Y'}{Y}=-\frac{2}{S}+\frac{1}{S-1} \Rightarrow LnY=Ln\frac{S-1}{S^2} \Rightarrow Y=\frac{S-1}{S^2}$$

5. جواب عمومی معادله $y''+y'+y=0$ برابر کدام است؟

1) $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right]$ 2) $y=e^{-x}[c_1\cos x+c_2\sin x]$

3) $y=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left[c_1\cos(\frac{1}{2}x)+c_2\sin(\frac{1}{2}x)\right]$ 4) $y=e^{x}[c_1\cos(-x)+c_2\sin(-x)]$

$$t^2+t+1 \Rightarrow t=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1-4})=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$$

6. **جواب عمومی معادله** $xy^1+(x-1)y=x^2e^{-x}$ **کدام است؟**

1) $y=xe^{-x+c}$ 2) $y=xe^{-x}(x+c)$

3) $y=e^{-x}(x+c)$ 4) $y=e^{x+c}(x-c)$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله خطی مرتبه اول است.

$$y'+\frac{x-1}{x}y=xe^{-x}\ ,\ \int\frac{x-1}{x}dx=x-Lnx\ ,\ e^{x-Lnx}=\frac{e^x}{x}$$

$$y=xe^{-x}\left(\int xe^{-x}\frac{e^x}{x}dx+C\right)=xe^{-x}(x+c)$$

7. **فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل** $y(x+y+1)+x(x+3y+2)y'=0$ **کدام است؟**

1) y 2) xy 3) $\frac{1}{y}$ 4) $\frac{1}{xy}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$x^{\alpha}y^{\beta+1}(x+y+1)dx+x^{\alpha+1}y^{\beta}(x+3y+2)dy=0$$

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial y}=(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}+(\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}+(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta}+3(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}+2(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}\end{cases}\Rightarrow \alpha=0\ ,\ \beta=1\Rightarrow F=y$$

8. **برای جواب مسأله مقدار اولیه** $\begin{cases}(x^2+2y)dx-xdy=0\\ y(1)=0\end{cases}$ **مقدار** $y(e)$ **کدام است؟**

1) 1 2) e^2 3) e^3 4) e

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله از نوع خطی است.

$$y' - \frac{\;}{x} y = x \Rightarrow y = x^{-}(\int \frac{\;}{x^2} dx + c)$$

$$y = x^2 Lnx + cx^2 \;,\; y(1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = x^2 Lnx \Rightarrow y(e) = e^2$$

9. **معادله برنولی $xy^2y' + y^3 = x\cos x$ معادل با کدام معادله است؟ (متغیر u از تغییر متغیر y حاصل می‌شود.)**

1) $u' + u = \cos x$
2) $u' - u = \cos x$
3) $u' + \frac{3}{x} u = 3\cos x$
4) $u' + \frac{1}{x} u = \cos x$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$u = y^3 \Rightarrow u' = 3y^2y' \Rightarrow xu' + 28 = 3x\cos x$$

10. از میان کلیه چند جمله‌ای‌ها لژاندار، سه چند جمله‌ای اول عبارتند از:

1) $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \;,\; P_1(x) = x_1P_0(x) = 1$
2) $P_2(x) = 3x^2 - 1 \;,\; P_1(x) = x_1P_0(x) = 1$
3) $P_2(x) = 1 - 3x^2 \;,\; P_1(x) = x_1P_0(x) = 1$
4) $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \;,\; P_1(x) = x_1P_2(x) = 1$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

11. **اگر $F(x) = \frac{1}{s} Ln(1 + \frac{1}{s^2})$، آن‌گاه $L^{-1}(F(s))$ برابر کدام است؟**

1) $\frac{2(1 - \cos u)}{u}$
2) $2\int_0^t \frac{1 + \sin u}{u} du$
3) $\frac{2(1 + \sin u)}{u}$
4) $2\int_0^t \frac{1 - \cos u}{u} du$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$L^{-1}\frac{1}{S}F_1(s) = \int_0^t L^{-1}F_1(s)dt$$

$$F_1(s) = Ln\frac{s^2 + 1}{s^2} = Ln(s^2 + 1) - 2Lns$$

$$F_1'(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s} \Rightarrow L^{-1}F_1'(s) = 2\cos t - 2$$

$$L^{-1}F_1(s) = \frac{-1}{t} L^{-1}F_1'(s)$$

$$L^{-1}F_1(s) = -\frac{2\cos t - 2}{t} \Rightarrow L^{-1}F_1(s) = 2\int_0^t \frac{1 - \cos u}{u} du$$

عبارت کدام است؟

1) $0\,,\,\frac{1}{2}$ 2) $0\,,\,-\frac{1}{2}$ 3) $1\,,\,\frac{1}{2}$ 4) $1\,,\,-\frac{1}{2}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$x=0$ یک نقطه منفرد منظم است.

توابع (x) و $h(x)$ هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند.

$$g(x)=\frac{1+6x}{2(1+x)} \text{ و } h(x)=\frac{x}{1+x}$$

$$r^2+r(g(0)-1)+h(0)=0 \Rightarrow r^2+r(\frac{1}{2}-1)=0 \Rightarrow r=0\,,\,\frac{1}{2}$$

13. **جواب معادله دیفرانسیل** $y'(1)=0$ **و** $y(1)=2\,,\,y'(1)=0$ $x^2y''+xy'+9y=0$ **با شرایط داده شده کدام است؟**

1) $y=2\sin(3Lnx)$ 2) $y=2\cos(3Lnx)$

3) $y=\cos(3Lnx)+2\sin(3Lnx)$ 4) $y=2\cos(3Lnx)+\sin(3Lnx)$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله از نوع کُشی می‌باشد.

$$t^2+9=0 \Rightarrow t=\pm 3i\ ,\ y=A\cos(3Lnx)+B\sin(3Lnx)$$

$$y(1)=2 \Rightarrow 2=A\cos(0)+b\sin(0) \Rightarrow A=2$$

$$y'=-\frac{6}{x}\sin(3Lnx)+\frac{3B}{x}\cos(3Lnx)\ ,\ y'(1)=0 \Rightarrow B=0$$

لذا $y=2\cos(3Lnx)$

14. **تبدیل لاپلاس** $f(t)=\int_0^t (t-x)^3\sin 2x dx$ **برابر کدام است؟**

1) $\frac{12}{s^4(s^2+4)}$ 2) $\frac{6}{s^4(s^2+4)}$ 3) $\frac{12}{s^3(s^2+4)}$ 4) $\frac{6}{s^3(s^2+4)}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با استفاده از قضیه کانولش داریم:

$$L\ f(t)=L\,(t^3)\,L\,(\sin 2t)=\frac{3!}{s^4}\times\frac{2}{s^2+4}=\frac{12}{s^4(s^2+4)}$$

15. جواب عمومی معادله $(D^2-3D+2)y=12e^{5x}$ کدام است؟

1) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+e^{5x}$
2) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$
3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$
4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{5x}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$D^2-3D+2=0 \Rightarrow D=1\,,\,2 \Rightarrow yh=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$$

$$y_p=Ae^{5x} \Rightarrow 25A-15A+2A=12 \Rightarrow A=1\,,\; y=yh+y_p$$

16. **معادله دیفرانسیل** $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2-4}$ **با کدام تغییر متغیر با معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود؟**

1) $t=y^2$
2) $t=x^2$
3) $t=y^{-2}$
4) $t=x^{-2}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله برنولی نسبت به x می‌باشد.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^2-4}{3xy} \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2+4}{2y}x^{-1}$$

و با تغییر متغیر $t=x^2$ به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

17. **مقدار انتگرال** $\int_{-1}^{1}P_0(x)dx$ **که در آن** $P_0(x)$ **یک چندجمله‌ای لژاندار می‌باشد. چقدر است؟**

1) صفر
2) $\frac{1}{2}$
3) 1
4) 2

حل: گزینه (۴) صحیح است.

می‌دانیم $P_0(x)=1$

$$\int_{-1}^{1}dx=x\Big|_{-1}^{1}=2$$

18. **مقدار** $y(\infty)$ **مربوط به معادله دیفرانسیل** $y'+5y=1$ **کدام است؟**

1) $\frac{1}{5}$
2) $\frac{1}{3}$
3) $\frac{1}{4}$
4) 1

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله از نوع خطی مرتبه اول است.

$$y=e^{-5x}\left(\int e^{5x}dx+c\right)=\frac{1}{5}+ce^{-5x} \Rightarrow y(+\infty)=\frac{1}{5}$$

.19 تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{\quad}{t}$ که در آن a عددی حقیقی است برابر کدام است؟

1) $Ln(1+\frac{a}{s})$　2) $-\tan^{-1}\frac{s}{a}$　3) $\frac{1}{s}Ln(1+\frac{a}{s})$　4) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{a}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$(\frac{\sin at}{t}) = \int_0^\infty \frac{a}{u^2+a^2}du = \tan^{-1}\frac{u}{a}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{a}$$

.20 **جواب عمومی معادله** $y''+6y'+9y=9x$ **عبارت است از:**

1) $y = c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}+x-\frac{2}{3}$　2) $y=(c_1+c_2x)e^{-3x}+2x-\frac{1}{3}$

3) $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+x-\frac{2}{3}$　4) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+2x-\frac{1}{3}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$t^2+6t+9=0 \Rightarrow t=-3\ ,\ yh=(c_1+c_2x)e^{-3x}$$

$$y_p = Ax+B\ ,\ y'_p = A\ ,\ y''_p = 0$$

$$6A+9Ax+9B \equiv 9x \Rightarrow A=1\ ,\ B=-\frac{2}{3} \Rightarrow y_p = x-\frac{2}{3}$$

.21 **اگر** $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ **فاکتور انتگرال معادله همگن زیر باشد. جواب آن کدام رابطه است؟**

$$(x-y)dy-(x+y)dx=0$$

1) $\tan^{-1}\frac{y}{x}-Ln\sqrt{x^2+y^2}=c$　2) $\tan^{-1}\frac{y}{x}-2Ln(1+\frac{y}{x})=c$

3) $\tan^{-1}\frac{y}{x}+Ln(1+\frac{y}{x})=c$　4) $\tan^{-1}\frac{y}{x}+Ln(x^2+y^2)=c$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله از نوع همگن می‌باشد.

$$y=\upsilon x \Rightarrow dy=\upsilon dx+xd\upsilon$$

$$x(1-\upsilon)(\upsilon dx+xd\upsilon)-x(1+\upsilon)dx=0 \Rightarrow (\upsilon^2+1)dx-x(1-\upsilon)d\upsilon=0$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-\upsilon}{1+\upsilon^2}d\upsilon=0 \Rightarrow Lnx-\tan^{-1}\upsilon+\frac{1}{2}Ln(1+\upsilon^2)=c$$

$$Lnx\sqrt{1+y^2/x^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=c \Rightarrow Ln\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=c$$

.22 **جوابی از معادله** $(x^2+y^2)dx+xydy=0$ **که از نقطه** $(1,1)$ **می‌گذرد، کدام است؟**

1) $y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$ 2) $y=\frac{2}{\sqrt{5-x^2}}$ 3) $y=\sqrt{\frac{3-x^2}{2}}$ 4) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{x^2}-x^2}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

معادله از نوع همگن می‌باشد.

$$y=\upsilon x \Rightarrow dy=\upsilon dx+xd\upsilon$$

$$x^2(1+\upsilon^2)dx+x^2\upsilon(\upsilon dx+xd\upsilon)=0 \Rightarrow (1+2\upsilon^2)dx+x\upsilon d\upsilon=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{\upsilon}{1+2\upsilon^2}d\upsilon=0 \Rightarrow \mathrm{Ln}x+\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(1+2\upsilon^2)=\mathrm{Ln}c_1 \Rightarrow x^4(1+2(\frac{y}{x})^2)=c$$

$$x^2(x^2+2y^2)=c\ ,\ x=1\ ,\ y=1 \Rightarrow c=3 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{x^2}-x^2}$$

23. **دستگاه معادلات** $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+2y\\ \frac{dy}{dt}=y+2x\end{cases}$ **هم‌ارز کدام معادله است؟**

1) $x''-2x'-3=0$ 2) $x'''+2x''+3x'=0$

3) $x'''-2x''-3x'=0$ 4) $x'''-2x''+3x'=0$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

از معادله اول دستگاه داریم:

$$y=\frac{1}{2}(x'-x) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(x''-x')$$

با جایگذاری در معادله دوم داریم:

$$\frac{1}{2}(x''-x')=\frac{1}{2}(x'-x)+2x \Rightarrow x''-2x'-3x=0 \Rightarrow x'''-2x''-3x'=0$$

24. **تبدیل لاپلاس تابع** $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ **کدام است؟**

1) $s>0,\ \frac{1}{\sqrt{s}}$ 2) $s>0,\ \frac{\sqrt{s}}{\pi}$ 3) $s>0,\ \pi\sqrt{s}$ 4) $s>0,\ \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$\Gamma(t^{-1/2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{1/2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\ ,\ s>0$$

25. **جواب خصوصی معادله** $y''-y'=2x$ **کدام است؟**

1) $y_p=-x(x+2)$ 2) $y_p=x(x+2)$ 3) $y_p=x(x-2)$ 4) $y_p=x(2x+1)$

چون صفر یک بار ریشه معادله مفسر است. لذا:

$$y_p = x(Ax+B)\ ,\ y'_p = 2Ax+B\ ,\ y''_p = 2A$$

$$2A - 2Ax + B = 2x \Rightarrow A = -1\ ,\ B = -2 \Rightarrow y_p = -x(x+2)$$

26. **جواب عمومی و جواب غیرعادی معادله** $y = xy' + \frac{1}{y'}$ **کدام‌اند؟**

1) $y^2 = 2x\ ,\ y = cx^2 + \frac{1}{cx}$

2) $y^2 = 4x\ ,\ y = cx + \frac{1}{c}$

3) $x = 4y^2\ ,\ y = cx - \frac{1}{c}$

4) $y^2 - x^2 = 2\ ,\ y = cx + \frac{1}{cx}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله کلرو است و جواب عمومی آن به فرم $y = cx + \frac{1}{c}$ می‌باشد و جواب غیرعادی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} y = cx + \frac{1}{c} \\ 0 = x - \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = c^2x^2 + \frac{1}{c^2} + 2x \\ x = \frac{1}{c^2} \end{cases} \qquad y^2 = x + x + 2x = 4x$$

27. **جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول** $ydx + x(x^2y - 1)dy = 0$ **کدام است؟**

1) $-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{3}y^3 = c$

2) $-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$

3) $-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2 + \frac{1}{3}y^3 = c$

4) $-(\frac{y}{x})^2 + y = c$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

ابتدا فاکتور انتگرال معادله را پیدا می‌کنیم.

$$x^{\alpha}y^{\beta+1}dx + x^{\alpha+1}y^{\beta}(x^2y - 1)dy = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -3\ ,\ \beta = 1 \Rightarrow F = \frac{y}{x^3}$$

معادله کامل

$$\frac{y^2}{x^3}dx + (y^2 - \frac{y}{x^2})dy = 0$$

$$u=\int\frac{y^2}{x^3}dx+f(y)=-\frac{1}{2}y^2x^{-2}+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=yx^{-2}+f'(y)=y^2-yx^{-2}\Rightarrow f(y)=\frac{1}{3}y^3$$

جواب $-\frac{1}{2}y^2x^{-2}+\frac{1}{3}y^3=c$

28. **جواب عمومی معادله $y'^2+2xy'=y^2-x^2$ برابر است با:**

1) $(y+x-1-c_1e^{x})(y+x-1-c_1e^{-x})=0$ 2) $(y+x-1+c_1e^{-x})(y-x-1+c_1e^{x})=0$

3) $(y-x-1+c_1e^{-x})(y+x-1+c_1e^{x})=0$ 4) $(y-x+1+c_1e^{x})(y+x+1+c_1e^{-x})=0$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$(y'+x)^2=y^2\Rightarrow y'=y-x\ ,\ y'=-y-z$$

$$y'-y=-x\Rightarrow y=e^{x}(\int -xe^{-x}dx+c)=x+1+ce^{x}$$

$$y'+y=-x\Rightarrow y=e^{-x}(\int -xe^{x}dx+c)=-x+1+ce^{-x}$$

جواب $(y-x-1+c_1e^{x})(y+x-1+c_1e^{-x})=0$

29. **پس از تغییر متغیر $y=e^{\int u(x)dx}$ معادله‌ی $x^2yy''=(y-xy')^2$ به کدام صورت درمی‌آید؟**

1) $x^2uu'=2-2xu$ 2) $x^2u'=2+xu$ 3) $x^2u'=1-2xu$ 4) $x^2uu'=1+xu$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$y=e^{\int u(x)dx}\ ,\ y'=u(x)e^{\int u(x)dx}\ ,\ y''=e^{\int u(x)dx}(u'(x)+u^2(x))$$

$$x^2e^{2\int u(x)dx}(u'(x)+u^2(x))=e^{2\int u(x)dx}(1-xu(x))^2$$

$$x^2u'+x^2u^2=1+x^2u^2-2xu\Rightarrow x^2u'=1-2xu$$

30. **جواب خصوصی $y_p(x)$ معادله دیفرانسیل $y''+4y=x\sin 2x$ از طریق کدام عبارت به دست می‌آید؟**

1) $(A.x^2+A_1x)\cos 2x+(B.x^2+B_1x)\sin 2x$

2) $(A.x+A_1)\cos 2x+(B.x+B_1)\sin 2x$

3) $(A.x^2+A_1x+A_2)\cos x$

4) $(A.x^2+A_1x)\cos x+(B.x^2+B_1x)\sin 2x$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$2i+$ یک بار ریشه معادله مفسر است.

31. در صورتی که **c** عدد ثابت و مثبتی باشد و تبدیل لاپلاس **f(x)** و **F(s)** بنامیم، تبدیل لاپلاس **f (cx)** کدام عبارتی می‌باشد؟

1) $\frac{1}{c}F(cx)$ 2) $\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$ 3) $\frac{1}{c}F(s)$ 4) $cF(cs)$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$f(cx)=\int_0^\infty e^{-sx}f(cx)dx=\frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}t}f(t)dt=\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$$

32. **جواب معادله‌ی دیفرانسیل** $(e^x-3x^2y^2)y'+ye^x=2xy^3$ **کدام است؟**

1) $ye^x-x^2y^3=c$ 2) $ye^{-y}+(x+y)^2=c$

3) $xe^x-y^2x^3=c$ 4) $xe^{-x}-(x+y)^2=c$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$(ye^x-2xy^3)dx+(e^x-3x^2y^2)dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x-6xy^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ معادله کامل

$$u=\int(ye^x-2xy^3)dx+f(y)=ye^x-x^2y^3+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x-3x^2y^2+f'(y)=e^x-3x^2y^2\Rightarrow f'(y)=c_1$$

جواب $ye^x-x^2y^3=c$

33. **فاکتور انتگرال (عامل انتگرال‌ساز) معادله دیفرانسیل:**

$$(\sin y-2ye^{-x}\sin x)dx+(\cos y+2e^{-x}\cos x)dy=0$$

کدام است؟

1) e^y 2) x 3) y 4) e^x

حل:گزینه (۴) صحیح است.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-2e^{-x}\sin x\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x$$

$$\frac{1}{Q}\ (\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{\cos y+2e^{-x}\cos x}=1\Rightarrow F=e^{\int dx}=e^x$$

1) $x^2(Ax+B)e^{x}+(Cx+D)e^{-x}$
2) $(Ax+B)\cosh x+(Cx+D)\sinh x$
3) $(Ax+B)e^{x}+x^2(Cx+D)e^{-x}$
4) $(Ax+B)e^{x}+(Cx+D)e^{-x}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$y''-2y'+y=\frac{x}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

چون 1 دو بار ریشه معادله مفسر است، لذا داریم:

$$y_{p_1}=x^2(Ax+B)e^{x}\ ,\ y_{p_2}=(Cx+D)e^{-x}\ ,\ y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$$

35. **اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\Upsilon}$ جواب معادله دیفرانسیل $(x^2-x)y''-xy'+y=0$ باشد، آن‌گاه مقدار Υ کدام است؟**

1) $0,-1$
2) $1,2$
3) $0,2$
4) $0,1$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$x=0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد.

$$g(x)=-\frac{x}{x-1}\ ,\ \ h(x)=\frac{x}{x-1}$$

توابع $h(x)$ و $g(x)$ هر دو در $x=0$ تحلیلی می‌باشند.

$$r^2+r(g(0)-1)-h(0)=0\Rightarrow r^2-r=0\Rightarrow r=0\,,1$$

36. **در صورتی که $[x]$، نشان‌دهنده‌ی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x یا مساوی با آن باشد. در این حال تبدیل لاپلاس تابع $I=x-[x]$ کدام است؟**

1) $\dfrac{e^{s}+1-s}{s^2(e^{x}+1)}$
2) $\dfrac{e^{s}+1}{s^2(1-e^{s})}$
3) $\dfrac{e^{s}-1-s}{s^2(e^{s}-1)}$
4) $\dfrac{e^{s}-1}{s^2(2-e^{-s})}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

فرض کنید $0<x<1$ و $f(x)=x$ تابعی متناوب با دوره تناوب 1 باشد. در این صورت:

$$L\ (f(x))=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 te^{-st}dt=\frac{1+s}{s^2}-\frac{1}{s(1-e^{-s})}=\frac{(1+s)(1-e^{-s})}{s^2(1-e^{-s})}$$

$$=\frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}=\frac{1}{s^2}\ \frac{e^{s}-1-s}{(e^{s}-1)}$$

1) $x^2+x+3y^2-2y=c$ 2) $x^2+3x+y^2-2y=c$

3) $2x^2+3x-y^2+2y=c$ 4) $2x^2-3x+y^2-3y=c$

حل گزینه (۲) صحیح است.

معادله از نوع جدا از هم می‌باشد.

$(2x+3)dx+(2y-2)dy=0$

$\int(2x+3)\,dx+\int(2y-2)\,dy=c \Rightarrow x^2+3x+y^2-2y=c$

38. **فرض کنید $y=\phi(t)$ جواب مسئله مقدار اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=0$; $y''+ty=0$ باشد. اگر Y تبدیل لاپلاس y باشد. Y در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟**

1) $Y'+s^2Y=1$ 2) $Y'-s^2Y=-1$ 3) $Y'+s^2Y=s$ 4) $Y'-s^2Y=-s$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$L\,y''+L\,(ty)=0 \Rightarrow s^2Y-sy(0)-y'(0)-Y'=0 \Rightarrow Y'-s^2Y=-s$

39. **دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $(x>0)$ و $2xy''+y'+xy=0$ کدام است؟**

1) $y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ و $y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

2) $y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ و $y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

3) $y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ و $y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

4) $y_1(x)=x^{\frac{2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ و $y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$x=0$ یک نقطه منفرد و منظم می‌باشد. زیرا ضریب y'' در $x=0$ برابر صفر است و توابع $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x=0$ تحلیلی می‌باشند.

$g(x)=\frac{1}{2}\;,\;\; h(x)=\frac{x^2}{2}$

معادله شاخص: $r^2+r(g(0)-1)+h(0)=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0 \Rightarrow r=0\;,\;\; r=\frac{1}{2}$

چون تفاضل ریشه‌ها عدد صحیح نمی‌باشد. لذا جواب‌های مستقل به فرم گزینه (1) بیان می‌شوند.

40. جواب مسئله مقدار اولیه $y''-3y^2=0$ و $y(0)=2$ و $y'(0)=4$ در نقطه $x=-1$ برابر است با:

$\frac{1}{2}$ (1 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ (2 $\qquad$ $\frac{3}{4}$ (3 $\qquad$ $\frac{5}{4}$ (4

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله از نوع فاقد متغیر می‌باشد.

$$y'=P\ ,\ y''=P\frac{dP}{dy}\Rightarrow P\frac{dP}{dy}=3y^2\Rightarrow pdp=3y^2dy$$

$$\frac{1}{2}P^2=y^3+c_1\Rightarrow (y')^2=2y^3+c\Rightarrow (y'(0))^2=2y^3(0)+c\Rightarrow 16=16+c\Rightarrow c=0$$

$$y'=\sqrt{2y^3}\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2y^3}}=dx\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\int y^{-3/2}dy=x+k$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}y^{-1/2}=x+k\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}}(y(0))^{-1/2}=0+k\Rightarrow k=-1$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}y^{-1/2}=x-1\xrightarrow{x=-1}-\frac{2}{\sqrt{2}}y^{-1/2}=-2\Rightarrow y^{-1/2}=\sqrt{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

41. **به ازای چه مقدار از پارامتر γ ، جواب مسئله مقدار اولیه $y(1)=1$ ، $y'(1)=\gamma$ و $x^2y''-2y=0$ وقتی $x\to 0^+$ کراندار است؟**

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله از نوع کُشی می‌باشد.

$$t^2-t-2=0\Rightarrow t=2\ ,\ -1\Rightarrow y=c_1x^2+c_2x^{-1}$$

$$\begin{cases} y'=2c_1x-c_2x^{-2} \\ y=c_1x^2+c_2x^{-1} \end{cases}\ ,\ y(1)=1\ ,\ y'(1)=\gamma\Rightarrow c_1=\frac{1+\gamma}{3}\ ,\ c_3=\frac{2-\gamma}{3}$$

$$y=\frac{1+\gamma}{3}x^2+\frac{2-\gamma}{3}x^{-1}$$

برای آن‌که وقتی $x\to 0^+$ میل می‌کند y کراندار باشد باید $2-\gamma=0\Rightarrow \gamma=2$

42. **کدام مورد یک جواب خصوصی برای معادله $y''+4y=3\cos 2x+2\sin h\,x$ می‌باشد؟**

$\frac{3}{4}x\ \sin 2x+\frac{2}{5}\sin h\,x$ (1 $\qquad$ $\frac{3}{4}x\sin 2x-\frac{2}{5}\cos h\,x$ (2

$-\frac{3}{4}x\cos 2x+\frac{2}{5}\sin h\,x$ (3 $\qquad$ $-\frac{3}{4}x\cos 2x+\frac{2}{5}\cos h\,x$ (4

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$y''+4y+3\cos 2x+e^x-e^{-x}\ ,\ t^2+4=0\Rightarrow t=\pm 2i$$

با جایگذاری در معادله داریم: $A=0$ و $B=\frac{3}{4}$

$$y_{p_2}=ce^x \ , \ y''_{p_2}=ce$$

$$4ce^x+ce^x\equiv e^x \Rightarrow c=\frac{1}{5}$$

$$y_{p_2}=De^{-x} \ , \ y''_{p_2}=De^{-x}$$

$$4De^{-x}+De^{-x}\equiv -e^{-x} \Rightarrow D=-\frac{1}{5}$$

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=\frac{3}{4}x\sin x+\frac{1}{5}(e^x-e^{-x})=\frac{3}{4}x\sin x+\frac{2}{5}\sin h\,x$$

43. معادله‌ی دیفرانسیل برای مسیرهای متعامد بر دسته خم‌های $y=ce^{-x^2/2}$ عبارت است از:

1) $yy'=-x$ 2) $yy'=x$ 3) $yy'=-\frac{1}{x}$ 4) $yy'=\frac{1}{x}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

(معادله دیفرانسیل مسیر اصلی)

$$\begin{cases} y=ce^{-x^2/2} \\ y'=-cxe^{-x^2/2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{y'}=-\frac{1}{x}$$

کافی است به جای y' قرار دهیم $-\frac{1}{y'}$

$$y(-y')=-\frac{1}{x} \Rightarrow yy'=\frac{1}{x}$$

44. معادله‌ی دیفرانسیل خم‌های $y=2\tan h(2x+c)-4x+1$ کدام است؟

1) $y'=(y+2x-1)^2$ 2) $y'=\tan h^{-1}(y+2x-1)^2$

3) $y'=(y+4x-1)^2$ 4) $y'=\tan h^{-1}(y+4x-1)^2$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

با حذف c در دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} y=2\tan h(2x+c)-4x+1 \\ y'=4\sec h^2(2x+c)-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+4x-1)^2=4\tan h^2(2x+c) \\ y'=4\sec h^2(2x+c)-4 \end{cases}$$

$$4(1-\sec h^2(2x+c))=(y+4x-1)^2 \Rightarrow y'=-(y+4x-1)^2$$

.45 رونسکین توابع $y_1(x) = e$ ... و ... عبارت است از:

(1 $144e^{15x}$ (2 $1440\,e^{15x}$ (3 $288\,e^{15x}$ (4 $720\,e^{15x}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} & e^{5x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} & 4e^{4x} & 5e^{5x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} & 16e^{4x} & 25e^{5x} \\ e^x & 8e^{2x} & 27e^{3x} & 64e^{4x} & 125e^{5x} \\ e^x & 16e^{2x} & 81e^{3x} & 256e^{4x} & 625e^{5x} \end{vmatrix} = e^{15x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} = 288\,e^{15x}$$

.46 **ریشه‌های معادله شاخصی برای معادله دیفرانسیل** $2x(1+x)y'' + (1+4x)y' + 2y = 0$ **عبارتند از:**

(1 $r_1 = 0$ و $r_2 = \frac{1}{2}$ (2 $r = 0$ و $r_2 = \frac{3}{2}$ (3 $r_1 = \frac{1}{2}$ و $r_2 = \frac{2}{3}$ (4 $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

توابع $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی می‌باشند. لذا $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است.

$$g(x) = \frac{1+4x}{2(1+x)} \;,\; h(x) = \frac{x}{1+x}$$

معادله شاخصی : $r^2 + r(g(0)-1) + h(0) = 0 \Rightarrow r^2 + r(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \,,\, r_2 = \frac{1}{2}$

.47 **اگر** $F(x) = \mathrm{Ln}\,\frac{s-3}{s}$ ، **آن‌گاه تبدیل معکوس $F(s)$ عبارت است از:**

(1 $f(t) = \frac{1+e^{3t}}{t}$ (2 $f(t) = \frac{1-e^{3t}}{t}$ (3 $f(t) = \frac{1+e^{3t}}{t^2}$ (4 $f(t) = \frac{1-e^{3t}}{t^2}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$F(s) = \mathrm{Ln}(s-3) - \mathrm{Ln}\,s \Rightarrow F'(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s} \Rightarrow L^{-1}F'(s) = e^{3t} - 1$$

$$f(t) = -\frac{e^{3t}-1}{t} = \frac{1-e^{3t}}{t}$$

.48 **تبدیل لاپلاس تابع** $f(t) = (t^2 - t)e^{2t}$ **کدام است؟**

(1 $\frac{4}{(s-2)^2}$ (2 $\frac{s}{(s-2)^3}$ (3 $\frac{4+s}{(s-2)^3}$ (4 $\frac{4-s}{(s-2)^3}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$L\,a^{at} f(t) = F(s-a)$$

$L e \ (t - t) = \frac{}{(s-2)^3} - \frac{}{(s-2)^2} = \frac{}{(s-2)^3} = \frac{}{(s-2)^3}$

.49 تبدیل لاپلاس جواب مسئله با مقدار اولیه $y'(0)=0$ ، $y(0)=0$ و $y''-y'+y=t$ عبارت است از:

1) $y(s)=\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$ 2) $y(s)=\frac{-1}{s^2(s^2-s+1)}$

3) $y(s)=\frac{s-1}{s^2(s^2-s+1)}$ 4) $y(s)=\frac{s+1}{s^2(s^2-s+1)}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$L\,y''-L\,y'+L\,y=L(t)\Rightarrow S^2Y-sy(0)-y'(0)-sY-y(0)+Y=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s^2-s+1)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow Y=\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$$

.50 اگر معادله دیفرانسیل $(2ye^{x^2y^2}+2y^2)dx+(2xe^{x^2y^2}+3xy)dy=0$ فاکتور انتگرالی به صورت x^ay^a داشته باشد، a کدام است؟

1) 1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) -1

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\begin{cases}P(x,y)=2ye^{x^2y^2}+2y^2\\ Q(x,y)=2xe^{x^2y^2}+3xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_0=2e^{x^2y^2}+4y^2e^{x^2y^2}+4y\\ Q_x=2e^{x^2y^2}+4x^2e^{x^2y^2}+3y\end{cases}$$

با توجه به فرض، معادله دارای عامل انتگرال‌سازی (فاکتور انتگرال) برحسب تابعی از xy است.

$(\mu=\mu(x,y))$

$$f(xy)=f(z)=\frac{P_y-P_x}{yQ-xP}=\frac{y}{xy^2}=\frac{1}{xy}=\frac{1}{z}\Rightarrow\mu=e^{\int\frac{1}{z}dz}=e^{Ln|z|}=z=xy=x^ay^a$$

$$\Rightarrow a=1$$

.51 جواب عمومی معادله $y''+(\tan x)y'=\cos^2 x$ کدام است؟

1) $y=-\cos^2 x+c_1\sin x+c_2$ 2) $y=-\frac{1}{4}\cos 2x+c_1\sin x+c_2$

3) $y=\sin^2 x+c_1\cos x+c_2$ 4) $y=\frac{1}{4}\sin 2x+c_1\cos x+c_2$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$y''+y'\tan x=0\ \Rightarrow\ y''=-y'\tan x\Rightarrow\frac{y''}{y'}=-\tan x$$

جواب معادله همگن

$$\Rightarrow yh = c_1\int \cos x \ dx = c_1 \sin x + c_2$$

$$y_1 = \sin x \ , \ y_2 = 1 \Rightarrow w = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -\cos x$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 \sin x + u_2$$

$$u_1 = -\int \frac{\cos^2 x}{-\cos x}\ dx = \int \cos x \ dx = \sin x$$

$$u_2 = \int \frac{\sin x . \cos^2 x}{-\cos x}\ dx = \frac{1}{2}\cos^2 x \Rightarrow y_p = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1+\cos 2x}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x$$

$$\Rightarrow y = yh + y_p = c_1 \sin x + c_2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + c_1 \sin x + c_2'$$

فرض: $c_2 + \frac{3}{4} = c_2'$

52. **معادله دیفرانسیل $xy' + xy + y = 0$ را در نظر می‌گیریم. کدام عبارت درست است؟**

1) همه جواب‌های y، تبدیل لاپلاس دارند.
2) معادله جواب غیرصفر برای y ندارد.
3) جواب غیرصفر y، تبدیل لاپلاس ندارد.
4) هیچ‌کدام از جواب‌های y تبدیل ندارند.

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$xy' + (x+1)y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \text{Ln}\,|y| = \int (-1-\frac{1}{x})dx$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\,|y| = -x - \text{Ln}x + c_1$$

$$\Rightarrow y = e^{-x-\text{Ln}|x|+c}$$

$$\Rightarrow y = e^{-x} \times e^{-\text{Ln}|x|} \times e^{c} = e^{-x}e^{c}$$

$$\Rightarrow y = K\frac{e^{-x}}{x}$$

فرض: $e^c = K > 0$

تابع $K > 0 \ , \ y = K\frac{e^{-x}}{x}$ تبدیل لاپلاس ندارد. (انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{Ke^{-(s+1)x}}{x}dx$ واگرا است.)

.53 جواب معادله انتگرالی $y'(t)+\int_0^t y(x)\cos(t-x)dx=\cos t$ و $y(0)=0$ کدام است؟

1) $y(t)=\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t$ 2) $y(t)=\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$

3) $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t$ 4) $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L|y'|+L\left[\int_0^t y(x)\cos(t-x)dx\right]=L[\cos t]\ ,\ y(0)=0$$

$$\Rightarrow SY(S)-y(0)+L[\cos t].L[y(t)]=\frac{S}{S^2+1}\Rightarrow SY(S)+\frac{S}{S^2+1}Y(S)=\frac{S}{S^2+1}$$

$$\Rightarrow Y(S)(S+\frac{S}{S^2+1})=\frac{S}{S^2+1}\Rightarrow Y(S)(\frac{S^3+2S}{S^2+1})=\frac{S}{S^2+1}$$

$$\Rightarrow Y(S)=\frac{1}{S^2+2}\Rightarrow L^{-1}[Y(S)]=L^{-1}[\frac{1}{S^2+(\sqrt{2})^2}]=\frac{1}{\sqrt{2}}L^{-1}[\frac{\sqrt{2}}{S^2+(\sqrt{2})^2}]$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

.54 اگر $\varphi(x)$ تبدیل لاپلاس **x** باشد و $x''(t)+tx'(t)-x(t)=0$ ، $x(0)=0$ ، $x'(0)=1$ و $\varphi'(x)$ کدام است؟

1) $\varphi'(x)=\frac{1}{s}+(\frac{2}{s}-s)\varphi(x)$ 2) $\varphi'(x)=-\frac{1}{s}+(s-\frac{2}{s})\varphi(x)$

3) $\varphi'(x)=(\frac{2}{2}+s)\varphi(x)$ 4) $\varphi'(x)=(\frac{1}{s}+s)\varphi(x)$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$L\,x''+L\,tx'-L\,x=0\Rightarrow s^2\varphi(x)-sx(0)-1-(s\varphi(x)-x(0))'-\varphi(x)=0$$

$$s^2\varphi(x)-1-\varphi(x)-s\varphi'(x)-\varphi(x)=0\Rightarrow\varphi'(x)=-\frac{1}{2}+(s-\frac{2}{s})\varphi(x)$$

.55 اگر $x(0)=\frac{7}{3}$ و $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{3x-4}$ ، **x** در کدام رابطه صدق می‌کند؟

1) $\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}Ln(x-\frac{4}{3})=t+\frac{14}{9}$ 2) $\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}Ln(x+\frac{2}{3})=t+\frac{4}{9}$

3) $\frac{2}{3}(x+\frac{5}{3}Ln(x-\frac{2}{3}))=t+\frac{1}{9}$ 4) $\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}Ln(x-\frac{4}{3})=t+\frac{1}{7}$

$$dt=\frac{2x}{3x-4}dx=\frac{2}{3}\ \frac{x}{x-\frac{4}{3}}dx=\frac{2}{3}\ \frac{x-\frac{4}{3}+\frac{3}{3}}{x-\frac{4}{3}}dx=\frac{2}{3}(1+\frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{4}{3}})\,dx$$

$$t=\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}Ln(x-\frac{4}{3})+c\Rightarrow 0=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}-\frac{8}{9}Ln(\frac{7}{3}-\frac{4}{3})+c\Rightarrow c=-\frac{14}{9}$$

$$t=\frac{2}{3}+\frac{8}{9}Ln(x-\frac{4}{3})-\frac{14}{9}$$

56. **جواب معادله** $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$ **کدام است؟**

1) e^x 2) $\sin x$ 3) xe^x 4) $x\sin x$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله خطی همگن با ضرایب متغیر می‌باشد و چون مجموع ضرایب برابر صفر است. لذا یک جواب $y=e^x$ می‌باشد.

57. **جواب معادله** $(2y'''-y''-5y-2)y=0$ **برابر است با:**

1) $y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$ 2) $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+c_3e^{\frac{x}{3}}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}$ 4) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{\frac{x}{2}}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

e^x در معادله صدق نمی‌کند. لذا فقط گزینه (1) می‌تواند صحیح باشد.

58. **کدام مورد حل معادله دیفرانسیل** $x>0$ ، $xy'+2y=\frac{1}{x(3x+2)}$ **می‌باشد؟**

1) $\frac{x^2+c}{e^{x^2}}$ 2) $\frac{Ln(3x+2)+c}{x^2+1}$

3) $\frac{\frac{1}{3}Ln(3x+2)+c}{x^2}$ 4) $\frac{2Lnx+c}{3x+2}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

معادله خطی مرتبه اول

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2(3x+2)} \qquad \int\frac{2}{x}dx=2Lnx$$

$$y=e^{-Lnx^2}\left[\int\frac{1}{x^2(3x+2)}e^{Lnx^2}dx+c\right]=\frac{1}{x^2}\left(\int\frac{1}{3x+2}dx+c\right)$$

$= \frac{}{x^2}(\frac{}{3}Ln(6x+2)+c)$

59. کدام‌یک از تبدیلات، معادله $y'+p(x)y=q(x)y^3$ را تبدیل به یک معادله خطی خواهد کرد؟

1) $x=y^2$ 2) $x=y^{-2}$ 3) $x=y^{-2}$ 4) $x=y^3$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله برنولی می‌باشد. لذا با تبدیل $z=y^{1-3}=y^{-2}$ به معادله خطی تبدیل می‌شود.

60. **کران پایین برای شعاع همگرایی جواب‌ه‌ای سری معادله دیفرانسیل $(1+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0$ حول نقطه $x=-\frac{1}{2}$ کدام است؟**

1) $\frac{5}{2}$ 2) 2 3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4) $\sqrt{3}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$y''+\frac{2x}{1+x^2}y'+\frac{4x^2}{1+x^2}y=0$$

کافی است فاصله بین ریشه‌ها $1+x^2=0$ یعنی $x=\pm i$ را از $x=-\frac{1}{2}$ حساب کنیم.

$$|-\frac{1}{2}+i|=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}2}{}$$

61. **یک جواب خصوصی معادله $y''-2y'+y=e^x$ کدام است؟**

1) $\frac{1}{2}xe^x$ 2) $\frac{1}{2}x^2e^x$ 3) $\frac{3}{4}x^2e^x$ 4) $\frac{3}{2}e^x$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

چون 1 دو بار ریشه معادله مفسر است. لذا:

$$y_p=Ax^2e^x\ ,\ y_p'=Ae^x(2x+x^2)\ ,\ y_p''=Ae^x(4x+x^2+2)$$

$$Ae^x(4x+x^2+2-4x-2x^2+x^2)=e^x\Rightarrow A=\frac{1}{2}\ ,\ y_p=\frac{1}{2}x^2e^x$$

62. **فرض کنید y جواب مسئله مقدار اولیه $y'(0)=1$ ، $y(0)=0$ ، $(1-t^2)y''-2ty^2+2y=0$ و Y تبدیل لاپلاس y باشد. Y در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟**

1) $(1-s^2)Y''-2sY'+(s^2+2)Y=-1$ 2) $s^2Y''-2sY'+2s^2Y=-1$

$(1-s^2)Y''+2sY'+2s^2Y=-1$ (3 $\qquad$ $s^2Y''+2sY'-(s^2+2)Y=-1$ (4

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$L\,((1-t^2)y'')-2\,L\,(ty')+2\,L\,y=0$$

$$s^2Y-1-(s^2Y-1)''+2(sY)'+2Y=0$$

$$s^2Y-1-(2Y+4sY'+s^2Y'')+2(Y+sY')+2Y=0$$

$$s^2Y''+2sY'-(s^2+2)Y=-1$$

63. **با تغییر متغیر $z=Lnx$، معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy^2+y=0\ ,\ x>0$ به کدام معادله‌ای تبدیل می‌شود؟**

1) $\dfrac{d^2y}{dz^2}+y=0$ $\qquad$ 2) $\dfrac{d^2y}{dz^2}+\dfrac{dy}{dz}+y=0$

3) $2\dfrac{d^2y}{dz^2}-\dfrac{dy}{dz}+y=0$ $\qquad$ 4) $4\dfrac{d^2y}{dz^2}+2\dfrac{dy}{dz}+y=0$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله کشی و با تغییر متغیر $z=Lnx$ تبدیل به معادله زیر می‌شود.

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(1-1)\frac{dy}{dz}+y=0\Rightarrow\frac{d^2y}{dz^2}+y=0$$

64. **دو جواب مستقل معادله $3x^2y''+2xy'+x^2y=0\ ,\ x>0$ به کدام صورت می‌باشند؟**

1) $y_1(x)=x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $y_2(x)=x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

2) $y_1(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $y_2(x)=x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

3) $y_1(x)=x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $y_2(x)=x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

4) $y_1(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$x=0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد.

$$g(x)=\frac{2}{3}\ ,\ h(x)=\frac{x^2}{3}\ ,\ r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0\Rightarrow r^2-\frac{1}{3}r=0\Rightarrow r=0\,,\,\frac{1}{3}$$

$$y_1(x) = x^3 \sum_{n=0} a_n x^n \ , \ y_2(x) = x^0 \sum_{n=0} b_n x^n$$

.65 **مسیر قائم (متعامد) خانواده هذلولی‌های $xy = C$ که در آن C ثابت است. کدام‌یک از خانواده منحنی‌ها است؟**

1) $x^2 + y^2 = C$ 2) $x^2 - y^2 = C$ 3) $x^2 + 2y^2 = C$ 4) $2x^2 - y^2 = C$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

با حذف C در دستگاه زیر، معادله دیفرانسیل مسیر اصلی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} xy = C \\ y + xy' = 0 \end{cases} \Rightarrow y + xy' = 0$$

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل مسیر قائم به جای y' قرار می‌دهیم $-\frac{1}{y'}$

$$y - \frac{x}{y'} = 0 \Rightarrow y\,dy - x\,dx = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = C$$

.66 **جواب مسئله مقدار اولیه $y''(0) = 2$ ، $y'(0) = 1$ ، $y(0) = 0$ و $y''' + y' = 0$ کدام است؟**

1) $y = 2 - 2\cos x + \sin x$ 2) $y = 1 + \cos x + 2\sin x$

3) $y = 2 + \cos x - 2\sin x$ 4) $y = 1 + \cos x + \sin x$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با فرض $y' = p$ داریم:

$$p'' + p = 0 \Rightarrow t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i \Rightarrow p = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y'(0) = p(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \ , \ y' = \cos x + c_2 \sin x$$

$$y'' = -\sin x + c_2 \cos x \ , \ y''(0) = 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$y' = \cos x + 2\sin x \Rightarrow y = \sin x - 2x\cos x + c_2 \ , \ y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 2$$

توجه $y(0) = 0$ فقط در گزینه (1) صدق می‌کند.

.67 **جواب معادله انتگرالی $y'(t) + 3\int_0^t y(x)\cos(t-x)dx = \cos t \ , \ y(0) = 0$ کدام است؟**

1) $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$ 2) $y(t) = \frac{1}{2}\cos 2t$ 3) $y(t) = 2\sin 2t$ 4) $y(t) = 2\cos 2t$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با استفاده از قضیه کانولوشن داریم:

$$L\ y' + 3\ L\int_0^t y(x)\cos(t-x)\,dx = L\cos t$$

$$\ldots \frac{}{s^2+1} - \frac{}{s^2+1} \ldots$$

$$Y(s^2+4)=1 \Rightarrow Y=\frac{1}{s^2+4} \Rightarrow y=\frac{1}{2}L^{-1}\frac{2}{s^2+4}=\frac{1}{2}\sin 2t$$

68. مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}dx$ کدام است؟

1) $Ln2$ 2) $Ln5$ 3) $2Ln2$ 4) $2Ln5$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}=3$ و با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}dx = L\left(\frac{e^{-x}-e^{-4x}}{x}\right)\Bigg|_{s=0}=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+4}\right)ds$$

$$=Ln\left(\frac{s+1}{s+4}\right)\Bigg|_0^\infty=-Ln\frac{1}{4}2Ln2$$

69. فاکتور انتگرال معادله $(xy+y^2)dx=(2y+x+1)dy$ کدام است؟

1) e^{-x} 2) e^{-y} 3) $-x$ 4) $-y$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2y+x+1}{-(2y+x+1)}=-1 \Rightarrow F=e^{\int -dx}=e^{-x}$$

70. اگر $y'=(x+y-1)$ و $y(0)=1$ ، مقدار $y(1)$ کدام است؟

1) $-e$ 2) e 3) $e-1$ 4) $e+1$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$u=x+y-1 \Rightarrow y'=u'-1 \ , \ u'=u+1 \Rightarrow \frac{du}{u+1}=dx$$

$$Ln(u+1)=x+c_1 \Rightarrow x+y=ce^x \quad , \quad y(0)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow y+x=e^x$$

$$x=1 \Rightarrow y=e-1$$

71. کدام تابع جواب خصوصی معادله $(D^2-2D+1)y=2e^x$ است؟

1) $y=2xe^x$ 2) $y=xe^x$ 3) $y=2x^2e^x$ 4) $y=x^2e^x$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$y_p = Ax^2e^2 \ , \ y'_p = Ae^x(x^2+2x) \ , \ y''_p = Ae^x(x^2+4x+2)$$

$$Ae^x(x^2+4x+2-2x^2-4x+x^2) = 2e^x \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_p = x^2e^x$$

72. **در معادله دیفرانسیل** $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ **یکی از جواب‌های خصوصی به صورت** $y = f(x)$ **است. اگر** $f(0) = 1$ **باشد،** $f(\frac{\pi}{2})$ **کدام است؟**

1) $\frac{1}{e}$ 2) e 3) $\frac{2}{e}$ 4) $2e$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

معادله خطی مرتبه اول

$$\int \cos x\,dx = \sin x \ , \ y = e^{-\sin x}\left(\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx + c\right)$$

$$y = e^{-\sin x}(e^{\sin x}(\sin x - 1) + c) = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 2 \ , \ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{e}$$

73. **معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم دسته منحنی‌های** $y = x^2 + bx + 1$ **کدام است؟**

1) $(x^2 + y - 1)y' + x = 0$ 2) $(x^2 + y)y' + x = 0$

3) $(x^2 - 1)y' + xy = 0$ 4) $(x^2 - y)y' + x = 1$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با حذف b در دستگاه زیر، معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را به دست می‌آورد.

$$\begin{cases} y = x^2 + bx + 1 \\ y' = 2x + b \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + x(y' - 2x) + 1 = xy' - x^2 +$$

معادله دیفرانسیل مسیر قائم : $y'(y + x^2 - 1) + x = 0$

74. **جواب کلی معادله دیفرانسیل** $y''' + 2y'' + 2y' = 0$ **کدام است؟**

1) $y = Ae^{-x}\sin(x + a) + c$ 2) $y = Ae^{-x}\sin(x + a)$

3) $y = Ae^{-x}\cos(x + a) + cx$ 4) $y = Ae^{x}\cos(a + x) + c$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با فرض $y' = p$ داریم: $p'' + 2p' + 2p = 0$

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm i \Rightarrow P = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$y=\int P dx = Ae \quad \sin(x+a)+c$

75. تبدیل لاپلاس $x=\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام گزینه است؟

1) $-s^2Y-sy(0)-y'(0)$

2) $-s\frac{dY}{ds}-2Y+y(0)$

3) $-s^2\frac{dY}{ds}-2sY+y(0)$

4) $-\int(s^2Y+sy(0)+y'(0))ds$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به فرمول $L\ (tf(t))=-F'(s)$ داریم:

$$L\ (xy'')=-(s^2Y-sy(0)-y'(0))'=-2sY-s^2\frac{dY}{ds}+y(0)$$

76. **تبدیل لاپلاس تابع $t\sinh t$ کدام گزینه است؟**

1) $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

2) $\frac{2s}{(s^2-1)^2}$

3) $\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$

4) $\frac{-2s}{(s^2-1)^2}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$L\ L(t\sinh t)=-(\ \sinh t)'=-(\frac{1}{s^2-1})'=\frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

77. **برای حل کدام معادله زیر به روش سری توانی، جواب** $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+c}$ استفاده نمی‌شود؟

1) معادله بسل

2) معادله لژاندار

3) معادله فربنیوس

4) معادله بسل بهبود یافته

حل: گزینه (۲) صحیح است.

در معادله لژاندر $x=0$ یک نقطه معمولی است و جواب به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ در نظر گرفته می‌شود.

78. **معادله دیفرانسیل هرمیت به صورت $y''-2xy'+2ny=0$ است. جواب این معادله چندجمله‌ای هرمیت می‌باشد که متعامد هستند. تابع وزنی چندجمله‌ای‌های هرمیت کدام است؟**

1) 1

2) x

3) $-x^2$

4) e^{-x^2}

داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

79. **اگر** $y' = x + y - 1$ **و** $y(0) = 1$**، مقدار** $y(1)$ **کدام است؟**

1) $-e$ 2) e 3) $e-1$ 4) $e+1$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$u = x + y - 1 \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = u \Rightarrow \frac{du}{1+u} = dx$$

$$\mathrm{Ln}(1+u) = x + c_1 \Rightarrow x + y = ce^x \ , \ y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \ , \ x + y = e^x$$

$$\mathrm{Ln}(1+u) = x + c_1 \Rightarrow x + y = ce^x \ , \ y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \ , \ x + y = e^x$$

$$y(1) : 1 + y = c \Rightarrow y = c - 1$$

80. **کدام گزینه جوابی از معادله دیفرانسیل** $w(e^x, y) = e^x$ **می‌باشد؟** $w(e^x, y)$ **رونسکن** e^x **و** y **است).**

1) $e^{-x}+1$ 2) $e^{-x}-1$ 3) e^x+1 4) e^x-1

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$w(e^x, y) = \begin{vmatrix} e^x & y \\ e^x & y' \end{vmatrix} = e^x(y' - y) = e^x \Rightarrow y' - y = 1$$

$$y = e^x\left(\int e^{-x}dx + c\right) = -1 + ce^x$$

81. **جوابی خصوصی برای معادله دیفرانسیل** $(D-4)^3(D^2+1)y = x^2e^{4x}$ **به صورت زیر است؟**

1) $(A + Bx + cx^2)e^{2x}$ 2) $(Ax + Bx^2 + Cx^3)e^{2x}$

3) $(Ax^2 + Bx^3 + Cx^4)e^{4x}$ 4) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx^5)e^{2x}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

4 سه بار ریشه معادله مفسر است.

$$y_p = x^3e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

$$x''-4x'+4x=\int_0^t (t-z)^2 e^{2x}dz\ ,\ x(0)=0\ ,\ x'(0)=0$$

1) $\dfrac{2}{(s^2-2s)^3}$

2) $\dfrac{3}{(s^2-2s)^3}$

3) $\dfrac{2}{s^3(s-2)^2(s+2)}$

4) $\dfrac{3}{s^3(s-2)^2(s+3)}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با استفاده از قضیه کانولوشن داریم:

$$L\,x''-4\,L\,x'+4\,L\,L\,x=\left(\int_0^t (t-z)^2 e^{2x}dz\right)$$

$$s^2X-4sX+4X=\frac{2}{s^3}\ \frac{1}{s-2}\Rightarrow X=\frac{2}{s^3}\ \frac{1}{(s-2)^3}=\frac{2}{(s^2-2s)^3}$$

83. **اگر** $x(t)$ **و** $y(t)$ **با شرایط اولیه** $x(0)=1$ **و** $y(0)=2$ **جواب دستگاه زیر باشند، در این صورت مقادیر** $x(t)$ **و** $y(t)$ **در** $t=\pi$ **چقدر است؟**

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$$

1) $x(\pi)=+e^{-\pi}$ و $y(\pi)=2e^{\pi}$

2) $x(\pi)=-e^{-\pi}$ و $y(\pi)=-2e^{-\pi}$

3) $x(\pi)=-e^{\pi}$ و $y(\pi)=-2e^{\pi}$

4) $x(\pi)=-2e^{\pi}$ و $y(\pi)e^{\pi}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{cases}sX-1=X-Y\\ sY-2=X+Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X(s-1)+Y=1\\ -X+Y(s-1)=2\end{cases}$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-1 & 1\\ -1 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{(s-1)-2}{(s-1)^2+1}\Rightarrow x=e^t\ L^{-1}\frac{s-2}{s^2+1}$$

$$x=e^t(\cos t-2\sin t)\Rightarrow x(\pi)=-e^{\pi}$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}s-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{(s-1)^2+1}=\frac{2(s-1)+1}{(s-1)^2+1}\Rightarrow y=e^t\ L^{-1}\frac{2s+1}{s^2+1}$$

.84 فاکتور انتگرال معادله $(y^2+y)dx-xdy=0$ کدام است؟

$\frac{1}{y}$ (4 $\qquad$ $\frac{y^2}{x}$ (3 $\qquad$ $\frac{1}{y^2}$ (2 $\qquad$ $\frac{1}{x^2}$ (1

حل: گزینه (۲) صحیح است.

تابع $\frac{1}{y^2}$ یک فاکتور انتگرال برای معادله داده شده است. زیرا:

$$\frac{1}{y^2}((y^2+y)dx-xdy)=0 \Rightarrow (1+\frac{1}{y})dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

و معادله به دست آمده یک معادله کامل است، زیرا:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{y^2})=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(1+\frac{1}{y})$$

.85 **جواب عمومی معادله** $y'+x\sin 2y=2xe^{-x^2}\cos^2 y$ **کدام است؟**

$\tan y=ce^{-x^2}+xe^{-x^2}$ (2 $\qquad$ $\tan y=ce^{x^2}+x^2e^{x^2}$ (1

$\tan y=ce^{x^2}+xe^{x^2}$ (4 $\qquad$ $\tan y=ce^{-x^2}+x^2e^{-x^2}$ (3

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$\frac{y'}{\cos^2 y}+x\frac{2\sin y\cos y}{\cos^2 y}=2xe^{-x^2} \Rightarrow (\tan y)'+2x\tan y=2xe^{-x^2}$$

چون معادله حاصل خطی مرتبه اول برحسب $\tan y$ است، جواب آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x)=2x\ ,\ q(x)=2xe^{-x^2}\ ,\ g(x)=\int f(x)\,dx=x^2$$

$$y=e^{-g(x)}[\int q(x)e^{g(x)}dx+c]=e^{-x^2}[\int 2x\,dx+c]=x^2e^{-x^2}+ce^{-x^2}$$

.86 **با کدام تبدیل معادله دیفرانسیل زیر به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟**

$$4x^2y''+9xy'+y=0$$

$x=\mathrm{Ln}z$ (4 $\qquad$ $y=xe^x$ (3 $\qquad$ $y=zx$ (2 $\qquad$ $x=e^x$ (1

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله کُشی است و با تبدیل $x=e^z$ به معادله خطی تبدیل می‌شود.

87. اگر $y_1 = x$ یک جواب معادله $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ باشد. جواب عمومی این معادله کدام است؟

1) $y = c_1x + \frac{c_2}{x}e^x$ 2) $y = c_1x + \frac{c_2}{x^2}e^x$ 3) $y = c_1x + c_2xe^x$ 4) $y = c_1x + c_2e^x$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

توجه کنید که $y_2 = e^x$ یک جواب معادله است. زیرا:

$$y_2 = y_2' = y_2'' = e^x$$

$$(x-1)y_2'' - xy_2' + y_2 = (x-1)e^x - xe^x + e^x = 0$$

و جواب مستقل دیگر $y = x$ می‌باشد.

88. **معکوس تبدیل لاپلاس** $\frac{1}{\sqrt{4s-1}}$ **کدام است؟**

1) $\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\frac{t}{2}}$ 2) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{t}{2}}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{t}{2}}$ 4) $\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{2}}$

حل:گزینه (۲) صحیح است.

$$L^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s-\frac{1}{4}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{t}{2}}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{4s-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, L^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s-\frac{1}{4}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{t}{2}}$$

89. **منحنی‌های مسیر قائم بر خانواده منحنی‌های** $x^2y = c$ **کدام‌اند؟**

1) $y^2 + 2x^2 = c$ 2) $y^2 - 2x^2 = c$ 3) $2y^2 + x^2 = c$ 4) $2y^2 - x^2 = c$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

با حذف c در دستگاه زیر معادله دیفرانسیل مسیر اصلی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x^2y = c \\ 2xy + x^2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = -\frac{2xy}{x^2} = -2\frac{y}{x}$$

حالا به جای y' قرار می‌دهیم $-\frac{1}{y'}$ ، در نتیجه:

$$-\frac{1}{y'} = -2\frac{y}{x} \Rightarrow 2yy' = x \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow 2y^2 - x^2 = c$$

.90 جواب عمومی معادله $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ کدام است؟

1) $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$ 2) $y = c_1x^2 + c_2x^{-2}$

3) $y = c_1x^{-2} + c_2x$ 4) $y = c_1x^2 + c_2x$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$t^2 + (1-1)t - 4 = 0 \Rightarrow t = \pm 2$$

$$y = c_1x^2 + c_2x^{-2}$$

.91 **تبدیل معکوس لاپلاس** $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}e^{-\pi s}$ **کدام است؟**

1) $1 - \cos t$ 2) $1 + \cos t$ 3) $u_\pi(t)(1-\cos t)$ 4) $u_\pi(t)(1+\cos t)$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right) = 1 - \cos t$$

$$L^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = u_\pi(t)\ L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)\Bigg|_{t \to t+\pi} = u_\pi(t)(1-\cos(t+\pi))$$

$$= u_\pi(t)(1+\cos t)$$

.92 **فاکتور انتگرال معادله** $y' - (2y+1)x = 0$ **کدام است؟**

1) e^{x^2} 2) e^{-x^2} 3) e^{2x} 4) e^{-2x}

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله خطی مرتبه اول

$$y' - 2xy = x$$

$$F = e^{-\int 2x dx} = e^{-x^2}$$

.93 **کدام عدد جواب معادله مشخصه معادله دیفرانسیل** $2x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0$ **است؟**

1) -1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$2x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{x-1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0$$

$g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ و $h(x) = \dfrac{1}{2}$ معادله مشخصه $r^2 + (g(0)-1)r + h(0) = 0$ است. بنابراین:

$$r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (r-1)(r-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow r = 1\,,\ \frac{1}{2}$$

94. اگر $y = f(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $(2xy+y)dx = -(x^2+x)dy$ با شرط اولیه $y(1)=1$ باشد، مقدار $y(2)=f(2)$ چقدر است؟

1) -2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 2

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$(2xy+y)dx = -(x^2+x)dy \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x}dx = -\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow -Lny = Ln(c(x^2+x)) \Rightarrow y = \frac{c}{x^2+x}$$

$$y(1)=1 \Rightarrow c=2 \Rightarrow y(2) = \frac{2}{4+2} \Rightarrow y(2) = \frac{1}{3}$$

95. x و x^2 دو جواب مستقل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم هستند. ضریب مشتق مرتبه اول در این معادله کدام است؟

1) $-x^2$ 2) $-\frac{2}{x^2}$ 3) $-2x$ 4) $-\frac{2}{x}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

معادله باید کشی باشد.

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \Rightarrow y_1 = x \Rightarrow ax + bx = 0 \Rightarrow a+b=0$$

$$y_2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 + 2ax^2 + bx^2 = 0 \Rightarrow 2+2a+b=0$$

$$2+2a-a=0 \Rightarrow a=-2$$

96. در مورد معادله دیفرانسیل $x^2(x+3)y'' - 4(x+3)y' - 9xy = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که نقطه $x=-3$ ... و نقطه $x=0$ ... می‌باشند.

1) منفرد منظم، منفرد منظم   2) منفرد منظم، منفرد نامنظم

3) منفرد نامنظم، منفرد منظم   4) منفرد نامنظم، منفرد نامنظم

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله را به صورت $y'' - \frac{4}{x^2}y' - \frac{9}{x(x+3)}y = 0$ می‌نویسیم. چون تابع $\frac{4}{x}$ در $x=0$ تحلیلی نیست. لذا $x=0$ یک نقطه منفرد نامنظم است.

97. اگر $F(t) = L^{-1}\{\frac{(1+e^{3s})(2-e^{-2s})}{s^2}\}$ باشد، آن‌گاه $F(4)$ چقدر است؟ (L^{-1} عملگر معکوس لاپلاس است.)

1) -13 2) -8 3) 8 4) 13

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$F(t) = L^{-1}(\frac{2-e^{-5s}-e^{-2s}+2e^{-3s}}{s^2})$$

حال با توجه به رابطه $L(u_c(t)f(f)) = e^{-cs} L(f(t-c))$ داریم:

$$F(t)=2t-u_5(t)(t-5)-u_2(t)(t-2)+2u_3(t)(t-3) \Rightarrow F(4)=8-0-2+2=8$$

98. جواب معادله انتگرال $2\int_0^t y(x)y(t-x)dx = \sin t - t\cos t$ کدام است؟

1) $y = \sin t$ 2) $y = \cos t$ 3) $y = t\sin t$ 4) $y = t\cos t$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم، فرض کنید $Y = L(y)$.

$$2L(\int_0^t y(x)y(t-x)) = L(\sin t - t\cos t)$$

$$2L(y\times y) = L(\sin t) - L(t\cos t)$$

$$2Y^2 = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2} \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow y = \sin t$$

توجه : $L(t\cos t) = -(\frac{s}{s^2+1})'$

99. کدام‌یک از تبدیلات زیر معادله $y' + p(x)y = q(x)y^4$ را تبدیل به یک معادله خطی خواهد کرد؟

1) $x = y^2$ 2) $x = y^{-2}$ 3) $x = y^{-3}$ 4) $x = y^3$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

معادله برنولی و با تغییر متغیر $z = y^{1-4} = y^{-3}$ به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

100. یک جواب خصوصی معادله $y'' + 4y = 3\cos 2x$ کدام است؟

1) $\frac{3}{4}\cos 2x$ 2) $\frac{3}{4}x\sin 2x$ 3) $\frac{3}{4}\sin 2x$ 4) $\frac{2}{3}x\cos$

چون معادله مشخصه $\lambda^2+4=0$ دارای یک ریشه‌های $+2i$ است، لذا جواب خصوصی به صورت $y_p=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$ می‌باشد. بنابراین:

$$y'_p=2x(-A\sin 2x+B\cos 2x)+A\cos 2x+B\sin 2x$$

$$y''_p=4x(-A\cos 2x-B\sin 2x)+2(-A\sin 2x+B\cos 2x)-2A\sin 2x+2B\cos 2x$$

$$y''_p+4y_p=3\cos 2x \Rightarrow -4A\sin 2x+4B\cos 2x=3\cos 2x$$

لذا اگر قرار دهیم $B=\frac{3}{4}$ و $A=0$ یک جواب خصوصی خواهیم داشت. پس $y_p=\frac{3}{4}x\sin 2x$ یک جواب خصوصی معادله است.

101. فرض کنید y جواب مسئله مقدار اولیه $y'(0)=1$ ، $y(0)=0$ ، $(1-t^2)y''-2ty'+6y=0$ و Y تبدیل لاپلاس y در کدام معادله صدق می‌کند؟

1) $(1-s^2)Y''+2sY'+6s^2Y=-1$

2) $(1-s^2)Y''-2sY'+(s^2+6)Y=-1$

3) $s^2Y-2sY'+6s^2Y=-1$

4) $s^2Y''+2sY'-(s^2+6)Y=-1$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

فرض کنید $Y=L(y)$. داریم:

$$L(y'')=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-1,\ L(y')=sY-y(0)=sY$$

$$L(t^2y'')=2sY'+2Y+s^2Y''+2sY'$$

$$L(ty')=-(L(y'))'=-sY'-Y$$

حال با قرار دادن روابط فوق در معادله اصلی به دست می‌آوریم:

$$s^2Y''+2sY'-(s^2+6)Y=-1$$

102. با تغییر متغیر $z=\frac{x^2}{2}$، معادله دیفرانسیل $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0\ ,\ x>0$ به کدام معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

1) $2\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}+y=0$

2) $\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+y=0$

3) $\frac{d^2y}{dz^2}+y=0$

4) $4\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+y=0$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$z=\frac{x^2}{2}\Rightarrow x=\sqrt{2z}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dx}\ \frac{1}{\sqrt{2z}}=\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-\frac{1}{2}}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y'$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{d}{dz}(\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}z^{-\frac{3}{2}}\ \frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dz}(\frac{dy}{dx})$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}z^{-\frac{3}{2}}\ \frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dx}\ \frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dz}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}z^{-\frac{3}{2}}\ \frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}z^{-1}\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^3}y'+\frac{1}{x^2}y''$$

$$xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0\Rightarrow\frac{1}{x^2}y''+\frac{x^2-1}{x^3}y'+y=0$$

$$(\frac{1}{x^2}y''-\frac{1}{x^3}y')+\frac{1}{x}y'+y=0\Rightarrow\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+y=0$$

.103 **مسیر قائم (متعامد) خانواده سهمی‌های $y=kx^2$ که در آن k یک ثابت است. کدام‌یک از خانواده منحنی‌ها است؟**

1) $2x^2-y^2=k$ 2) $x^2+2y^2=k$ 3) $x^2-y^2=k$ 4) $x^2+y^2=k$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$\begin{cases}y=kx^2\\y'=2kx\end{cases}\Rightarrow y'=2\frac{y}{x^2}x=\frac{2y}{x}$$

حال به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم.

$$-\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x}\Rightarrow 2yy'=-x\Rightarrow y^2=-\frac{x^2}{2}+c\Rightarrow y^2+\frac{x^2}{2}=c$$

.104 **نیم‌عمر یک ماده رادیواکتیو که از قانون زوال مواد رادیواکتیو پیروی می‌کند ۳/۶۴ روز است. ۳۰۰ گرم از این ماده داده شده است. اگر m جرم ماده باقی‌مانده پس از ۱/۸۲ روز باشد. آن‌گاه کدام عبارت صحیح است؟**

1) $m<225$ گرم است.
2) مقدار m دقیقاً 255 گرم است.
3) $m>225$ گرم است.
4) مقدار m دقیقاً 150 گرم است.

حل: گزینه (۱) صحیح است.

جواب عمومی به صورت $m=m(0)e^{-kt}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = e^{-k(3/64)} \\ m = 300e^{-k(1/82)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ln\frac{1}{2} = -k(3/64) \\ Lnm = Ln300 - k(1/82) \end{cases}$$

$$Lnm = Ln300 - Ln(2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m = 300\sqrt{2} \Rightarrow m < 225$$

105. جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x' - 4x - 3y \\ y' = 5x - 4y \end{cases}$ وقتی که $x' = \frac{dx}{dt}$ و $y' = \frac{dy}{dt}$ می‌باشد. کدام است؟

1) $\begin{cases} x(t) = c_1te^t + c_2e^{-t} \\ y(t) = c_1e^t + \frac{c_2}{3}te^{-t} \end{cases}$ و

2) $\begin{cases} x(t) = c_1e^t + c_2te^{-t} \\ y(t) = c_1e^t + \frac{c_2}{3}e^{-t} \end{cases}$ و

3) $\begin{cases} x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \\ y(t) = c_1e^t + \frac{5}{3}c_2e^{-t} \end{cases}$ و

4) $\begin{cases} x(t) = c_1e^t + c_2te^{-t} \\ y(t) = c_1e^t + \frac{5}{3}c_2e^{-t} \end{cases}$ و

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$y = \frac{1}{3}(4x - x') \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(4x' - x'')$$

$$\frac{1}{3}(4x' - x'') = 5x - \frac{4}{3}(4x - x') \Rightarrow x'' - x = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow x = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

$$y = \frac{1}{3}(4c_1e^t + 4c_2e^{-t} - c_1e^t + c_2e^{-t}) = c_1e^t + \frac{5}{3}c_2e^{-t}$$

106. **با استفاده از روابط** $(x^{-\upsilon}J_\upsilon(x))' = -x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)$ **و** $(x^\upsilon J_\upsilon(x))' = x^\upsilon J_{\upsilon-1}(x)$ **برای توابع بسل حاصل** $(xJ_0(x)J_1(x))'$ **کدام است؟**

1) $J_0^2(x) - xJ_1^2(x)$ 2) $x[J_0^2(x) - J_1^2(x)]$ 3) $xJ_0^2(x) - J_1^2(x)$ 4) $x[J_0^2(x) + J_1^2(x)]$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$(xJ_0(x)J_1(x))' = J_0(x)J_1(x) + xJ_0'(x)J_1(x) + xJ_0(x)J_1'(x)$$

با استفاده از رابط اول با $\upsilon = 0$ داریم $J_0'(x) = -J_1(x)$ لذا $xJ_0'(x)J_1(x) = -xJ_1^2(x)$ با استفاده از رابطه دوم با $\upsilon = 1$ داریم:

$$J_0(x)J_1(x) + xJ_0(x)J_1'(x) = J_0(x)(J_1(x) + xJ_1'(x)) = J_0(x)(xJ_1(x))' = xJ_0^2(x)$$

۱۰۷. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t (t-x)^3 \sin x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{6!}{s^2(s^2+1)}$ ۲) $\frac{3!}{s^2(s^2+1)}$ ۳) $\frac{6!}{s^4(s^2+1)}$ ۴) $\frac{3!}{s^4(s^2+1)}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

با استفاده از قضیه کانولوشن داریم:

$$L\, f(t) = L\int_0^t (t-x)^3 \sin x dx \Rightarrow F(x) = \frac{3!}{s^4}\times\frac{1}{s^2+1} = \frac{3!}{s^4(s^2+1)}$$

۱۰۸. **اگر** $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$ **تبدیل لاپلاس تابع** $f(t)$ **باشد، آن‌گاه معکوس تبدیل لاپلاس تابع** $Ln(F(s))$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{t}(1-4\cos t)$ ۲) $\frac{1}{t}(4\cos t-1)$ ۳) $t(1-4\cos t)$ ۴) $t(4\cos t-1)$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

استفاده از فرمول $f(t)=-\frac{1}{t}\,L^{-1}\,F'(s)$ داریم:

$$F_1(s)=Ln\frac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow F_1(s)=Ln(s)-2Ln(s^2+1) \Rightarrow F_1'(s)=\frac{1}{s}-\frac{4s}{s^2+1}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{4s}{s^2+1}\right)=1-4\cos t \Rightarrow L^{-1}F_1(s)=-\frac{1}{t}(1-4\cos\ t)$$

۱۰۹. **جوابی از معادله** $(x^2+y^2)dx+xydy=0$ **که از نقطه** $(1\,,\,1)$ **می‌گذرد، کدام است؟**

۱) $y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$ ۲) $y=\frac{2}{\sqrt{5-x^2}}$

۳) $y=\sqrt{\frac{3-x^2}{2}}$ ۴) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{x^2}-x^2}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

معادله همگن با استفاده از تغییر متغیر $y=\upsilon x$ داریم:

$$x^2(1+\upsilon)^2dx+x^2\upsilon(\upsilon dx+xd\upsilon)=0 \Rightarrow (1+2\upsilon^2)dx+x\upsilon d\upsilon=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{\upsilon}{1+2\upsilon^2}d\upsilon=0 \Rightarrow Lnx+\frac{1}{4}Ln(1+2\upsilon^2)=Lnc_1$$

$$x^2(1+2(\frac{y}{x})^2)=c \Rightarrow x^2(x^2+2y^2)=c$$

$$x=1\,,\ y=1 \Rightarrow c=3 \Rightarrow 2y^2=\frac{3}{x^2}-x^2 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{x^2}-x^2}$$

.110 دستگاه معادلات $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y+2x\end{cases}$ هم‌ارز کدام معادله است؟

1) $x''-2x'-3=0$ 2) $x'''+2x''+3x'=0$

3) $x'''-2x''-3x'=0$ 4) $x'''-2x''+3x'=0$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$y=\frac{1}{2}(x'-x) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(x''-x')$$

$$\frac{1}{2}(x''-x')=\frac{1}{2}(x'-x)+2x \Rightarrow x''-2x'-3x=0 \Rightarrow x'''-2x''-3x'=0$$

.111 تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ کدام است؟

1) $\dfrac{1}{\sqrt{s}}$ و $s>0$ 2) $\dfrac{\sqrt{s}}{\pi}$ و $s>0$ 3) $\pi\sqrt{s}$ و $s>0$ 4) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$ و $s>0$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$L\,(t^{-\frac{1}{2}})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\ ,\ s>0$$

.112 جواب خصوصی معادله $y''-y'=2x$ کدام است؟

1) $y_p=-x(x+2)$ 2) $y_p=x(x+2)$

3) $y_p=x(x-2)$ 4) $y_p=x(2x+1)$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

صفر یک بار ریشه معادله مفسر است.

$$y_p=x(Ax+B)\,,\ y_p'=2Ax+B\,,\ y_p''=2A$$

$$2A-2Ax-B\equiv 2x \Rightarrow \begin{cases}-2A=2\\ 2A-B=0\end{cases} \Rightarrow A=-1\,,\ B=-2$$

$$y_p=x(-x-2)=-x(x+2)$$

.113 فرض کنید $y(x+y)dx+(x+2y-1)dy=0$، عامل انتگرال‌ساز این معادله کدام است؟

1) e^x 2) e^y 3) e^{-x} 4) e^{-y}

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1$$

$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=\frac{x+2y-1}{x+2y-1}=1$$ (تابعی از x)

$$F(x)=e^{\int dx}=e^{x}$$

.114 فرض کنید $2y''+\frac{x+1}{x}y'+y=0$. با تغییر متغیر $x=t^2$ این معادله به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

$\dot{y}=\frac{dy}{dt}$ و $\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$

1) $\ddot{y}+t\dot{y}+t^2y=0$

2) $\ddot{y}+t\dot{y}+2t^2y=0$

3) $2\ddot{y}+\dot{y}+2t^2y=0$

4) $t\ddot{y}+(t^2+2)\dot{y}+2t^3y=0$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$x=t^2\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}\dot{y}\quad ,\ y''=\frac{dy'}{dt}\ \frac{dt}{dx}=\frac{2t\ddot{y}-2\dot{y}}{4t^2}\times\frac{1}{2t}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{t\ddot{y}-\dot{y}}{2t^3}+\frac{t^2+1}{t^2}(\frac{\dot{y}}{2t})+y=0\Rightarrow 2\ddot{y}+\dot{y}+2t^2y=0$$

.115 تابع $F(s)=\frac{s+4}{s^2+4x+8}$ تبدیل لاپلاس کدام تابع است؟

1) $e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)$

2) $e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)$

3) $e^{2t}(\cos 2t+\sin 2t)$

4) $e^{2t}(\cos 2t+\sin 2t)$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$L^{-1}\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+4}=e^{-2t}\ L^{-1}\frac{s+2}{s^2+4}=e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)$$

116. اگر $y = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ باشد، آنگاه جواب عمومی آن کدام است؟

1) $x(A+Be^{-x})$ 2) $x(A+Be^{x}+x^{3})$

3) $x(A+Be^{x})$ 4) $x(A+Be^{-x}-x^{3})$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$y''-\frac{x+2}{x}y'+\frac{x+2}{x^2}y=0$$

$$u(x)=\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x+2}{x}dx}dx=\int\frac{1}{x^2}e^{x+Lnx^2}dx=\int e^{x}dx=e^{x}$$

$$y_2=uy_1=xe^{x}\ ,\ y=Ay_1+By_2=x(A+Be^{x})$$

117. **مطلوب است جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر:**

$$\frac{d^2u}{dx^2}+4u=2\sin 2x$$

1) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-2x\cos 2x$ 2) $c_1\sin 2x-c_2\cos 2x-2x^2\cos 2x$

3) $c_1\sin 2x-c_2\cos 2x-\frac{1}{2}x^2\sin 2x$ 4) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x$

جواب ندارد.

118. **پوش دسته دایره‌های** $m^2x^2+m^2y^2+2mx+y=0$ **عبارت است از:**

1) $y(x^2+y^2)^2=x^2(x^2-y^2)$ 2) $y(x^2+y^2)^2=x^2(x^2-2y^2)$

3) $y(x^2+y^2)^2=x^2(x^2+y^2)$ 4) $y(x^2+y^2)=x^2(x^2+2y^2)$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

نسبت به m مشتق می‌گیریم و m را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases}2mx^2+2my^2+2x=0\\ m^2x^2+m^2y^2+2mx+y=0\end{cases}\Rightarrow m=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$x^2\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)^2+y^2\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2+y^2}+y=\frac{x^4+x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2x^2}{x^2+y^2}+y$$

$$=-\frac{x^2}{x^2+y^2}+y=0\Rightarrow y(x^2+y^2)=x^2$$

.119 **معادله دیفرانسیل دسته منحنی $x^2+cy^2-y=0$ کدام است؟**

$2xy+(x-2y^2)y'=0$ (1 $\quad$ $2xy+(y-2x^2)y'=0$ (2

$2xy+(x^2-2y)y'=0$ (3 $\quad$ $2xy+(y^2-2x)y'=0$ (4

حل: گزینه (۲) صحیح است.

c را در دستگاه زیر حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+cy^2-y=0 \Rightarrow c=\dfrac{y-x^2}{y^2} \\ 2x+2cyy'-y'=0 \end{cases}$$

$$2x+2yy'\frac{y-x^2}{y^2}-y'=0 \Rightarrow 2xy+yy'-2y'x^2=0 \Rightarrow 2xy+y'(y-2x^2)=0$$

.120 **معادله دیفرانسیل** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{3x+x^2y^2}$ **با شرط اولیه** $y(1)=1$ **از کدام‌یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟**

$(-\frac{10}{13},2)$ (1 $\quad$ $(-\frac{20}{13},2)$ (2 $\quad$ $(\frac{10}{13},2)$ (3 $\quad$ $(\frac{20}{13},2)$ (4

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله برنولی نسبت به x می‌باشد.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{3x}{y}+x^2y \Rightarrow x^{-2}\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x^{-1}=y$$

$$u=x^{-1} \Rightarrow \frac{du}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy}$$

خط مرتبه اول

$$\frac{du}{dy}+\frac{3}{y}u=-y$$

$$u=e^{-Lny^2}(-\int ye^{Lny^3}dy+c)=\frac{1}{y^3}(-\int y^4dy+c)$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y^3}(-\frac{1}{5}y^5+c)\ ,\ y(1)=1 \Rightarrow c=\frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{y^2}{5}+\frac{6}{5y^3}\ ,\ y=2 \Rightarrow \frac{1}{x}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{20}=-\frac{13}{20} \Rightarrow x=-\frac{20}{13}$$

.121 **یک جواب خاص معادله** $y''+4y'=x^2+4$ **کدام‌یک از موارد زیر است؟**

$y_p=Ax+B$ (1 $\quad$ $y_p=Ax^2+Bx+C$ (2

$y_p=x(Ax^2+Bx+C)$ (3 $\quad$ $y_B=x^2(Ax^2+Bc+C)$ (4

$t^2+4t=0 \Rightarrow t=0\,,\,-4$ چون صفر یک بار ریشه معادله مفسر است. لذا:

$y_p = x(Ax^2+Bx+C)$

.122 **اگر** $y(x)$ **جواب معادله دیفرانسیل** $(x>0)$ $x^3y''+2x^2y'=a$ ، **با شرایط اولیه** $y(1)=0$ **و** $y'(1)=\frac{2}{3}a$ **باشد. مقدار** $y(e)$ **کدام است؟**

1) $\left(\frac{5-\frac{8}{e}}{3}\right)a$ 2) $\left(\frac{5-8e}{3}\right)a$ 3) $\left(\frac{5+\frac{8}{e}}{3}\right)a$ 4) $\left(\frac{5+8e}{3}\right)a$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

معادله فاقد y باشد.

$$y''=\frac{dp}{dx} \Rightarrow x^3\frac{dp}{dx}+2x^2p=a$$

$$\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=\frac{a}{x^3}$$ خطی مرتبه اول

$$\int\frac{2}{x}dx=Lnx^2$$

$$y'=p=e^{-Lnx^2}\left(\int\frac{a}{x^3}e^{Lnx^2}dx+c\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int\frac{a}{x}dx+c\right)=\frac{1}{x^2}(aLnx+c)$$

$$y'(1)=\frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{2}{3}a=c \Rightarrow y'=\frac{1}{x^2}\left(aLnx+\frac{2}{3}a\right)$$

$$y=a\left(\int\frac{Lnx}{x^2}dx-\frac{2}{3x}\right)+b=a\left(\int ue^{-u}du-\frac{2}{3x}\right)+b$$

توجه: $x=e^u$ و $u=Lnx$

$$y=a\left(-\frac{1}{x}(Lnx+1)-\frac{2}{3x}\right)+b\ ,\ y(1)=0 \Rightarrow 0=-a+\frac{2a}{3}+b \Rightarrow b=\frac{5a}{3}$$

$$y=a\left(-\frac{1}{x}(Lnx+1)-\frac{2}{3a}\right)+\frac{5a}{3}$$

$$y(e)=a\left(-\frac{8}{3e}+\frac{5}{3}\right)=a\left(\frac{5e-8}{3e}\right)$$

.123 **چهار جمله اول سری معادله** $y''+(y')^2=e^x y^3$ **با شرایط اولیه** $y(0)=1$ **و** $y'(0)=2$ **کدام است؟**

$y=1+2x+\frac{3}{2}x^2-\frac{19}{6}x^3+\dots$ (1

$y=1+2x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3+\dots$ (2

$y=1+2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{6}x^2+\dots$ (3

$y=1+2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\dots$ (4

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$y=y(0)=\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

$$y(0)=1\,,\ y'(0)=2\,,\ y''(0)+2^2=e^0\times 1\Rightarrow y''(0)=-3$$

$$y'''+2y'y''=e^x y^3+3y^2y'e^x\Rightarrow y'''(0)=12+1+6=19$$

$$y=1+2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{6}x^3+\dots$$

.124 **حاصل** $\int_0^\infty \frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}dt$ **کدام است؟**

$\cot^{-1}(\frac{3}{2})$ (1 $\tan^{-1}(\frac{3}{2})$ (2 $\frac{\pi}{4}$ (3 $\frac{\pi}{2}$ (4

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$\int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin 3t}{t}dt=L\left(\frac{\sin 3t}{t}\right)\Big|_{s=2}=\int_{s=2}^\infty\frac{3}{u^2+9}du=\tan^{-1}\frac{u}{3}\Big|_2^\infty$$

$$=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{2}{3}=\tan^{-1}\frac{3}{2}$$

.125 **جواب معادله** $xy'=e^{-xy}-y$ **کدام است؟**

$e^{-xy}=y+c$ (1 $e^{-xy}=x+c$ (2 $e^{xy}=y+c$ (3 $e^{xy}=x+c$ (4

حل: گزینه (۳) صحیح است.

تغییر متغیر $z=xy$ را اعمال می‌کنیم.

$$z=xy\Rightarrow z'=xy'+y \qquad (1)$$

$$xy'=e^{-xy}-y\Rightarrow xy'+y=e^{-xy} \qquad (2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow z'=e^{-z}\Rightarrow e^z dz=dx\Rightarrow \int e^z dz=\int dx$

$$\Rightarrow e^z=x+c\,,\ z=xy\Rightarrow e^{ey}+x+c$$

126. اگر y_1 و y_2 جواب‌های مستقل خطی معادله $y'' + \frac{2}{x} y' + e\, y = 0$ بوده و رونسکین y_1 و y_2 در نقطه $x=1$ برابر ۲ باشد. در این صورت رونسکین این دو جواب در $x = 5$ کدام است؟

1) $\frac{1}{25}$ 2) $\frac{2}{25}$ 3) 25 4) 50

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$w(y_1:y_2)(x) = Ke^{-\int p(x)\,dx} = Ke^{-\int \frac{2}{x}dx} = Ke^{-2Lnx} = \frac{K}{x^2}$$

$$w(y_1:y_2)(1) = 2 \Rightarrow K = 2$$

$$w(y_1:y_2)(x) = \frac{2}{x^2} \Rightarrow w(y_1:y_2)(5) = \frac{2}{25}$$

127. اگر xe^{2x} یک جواب معادله زیر باشد، یکی دیگر از جواب‌ةای معادله کدام است؟ (a یک عدد ثابت است.)

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} - 5y'' + a(y' - y) = 0$$

1) e^{-3x} 2) xe^{-3x} 3) e^{-2x} 4) x^2e^{2x}

حل: گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به جواب $y_1 = xe^{2x}$ معادله شاخص دارای دو جواب $t_1 = t_2 = 2$ و جواب دیگر معادله به فرم $y_2 = e^{2x}$ است.

معادله شاخص

$$t^4 - 4t^3 - 5t^2 + at - a = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow 16 - 32 - 20 + 2a - a = 0 \Rightarrow a = 36$$

$$\Rightarrow t^4 - 4t^3 - 5t^2 + 36t - 36 = 0 \Rightarrow (t-2)^2(t^2 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 = 2\ ,\ t_3 = 3\ ,\ t_4 = -3 \Rightarrow y_3 = e^{3x}\ ,\ y_4 = e^{-3x}$$

128. در بسط تیلور تابع جواب معادله زیر حول نقطه صفر، ضریب x^3 کدام است؟

$$y'' - (\sin x)y' + xy = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = -1$$

1) -1 2) $-\frac{1}{6}$ 3) $-\frac{1}{24}$ 4) صفر

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

بنابراین برای به دست اوردن ضریب x باید $y'''(0)$ را به دست اوریم.

مقادیر $y(0)=0$ و $y'(0)=-1$ را در معادله قرار می‌دهیم: $y''(0)=0$

از طرفین معادله مشتق می‌گیریم.

$$y''' - (\cos x)y' - (\sin x)y'' + y + xy' = 0$$

مقادیر $y(0)$ ، $y'(0)$ و $y''(0)$ را در معادله فوق قرار می‌دهیم:

$$y'''(0) - (1)(-1) = 0 \Rightarrow y'''(0) = -1$$

بنابراین ضریب x^3 برابر است با:

$$\frac{y'''(0)}{3!} = -\frac{1}{6}$$

129. **تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر به کدام صورت است؟ (c یک عدد ثابت می‌باشد.)**

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad 0 \le x < \infty \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

1) $\frac{c}{\sqrt{s^2-1}}$ 2) $\frac{c}{s\sqrt{s^2-1}}$ 3) $\frac{c}{s\sqrt{s^2+1}}$ 4) $\frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

روش اول: معادله دیفرانسیل $xy'' + y' + xy = 0$ و $(x^2y'' + xy' + x^2y)$ یک معادله دیفرانسیل بسل مرتبه صفر بوده و دارای یک جواب به صورت $y = J_0(x)$ است که دارای تبدیلات لاپلاس $Y(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$ می‌باشد.

روش دوم: از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم و $Y(s)$ را به دست می‌آوریم.

130. **جواب عمومی معادله** $y'' + 2y' + y = 5x + 1$ **کدام است؟**

1) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 5x$
2) $y = (c_1 + c_2x^2)e^{-x} - 5x - 9$
3) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 5x - 9$
4) $y = (c_1x + c_2x^2)e^{-x} + 5x + 9$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1 \ , \ -1 \Rightarrow yh = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

$$y_p = Ax + B \ , \ y_p = A \ , \ y_p'' = 0$$

$$0 + 2A + Ax + B \equiv 5x + 1 \Rightarrow A = 5 \ , \ B = -9 \Rightarrow y_p = 5x - 9$$

131. معادله دیفرانسیل $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=4x^{-1}$ دارای حل همگن $c_1x+\frac{c_2}{x}$ می‌باشد. حل غیرهمگن آن برابر است با:

1) $x+x^{-1}$ 2) $x(2Lnx-1)$ 3) $x^{-1}Lnx+x^2$ 4) $\frac{1+2Lnx}{x}$

حل: معادله از نوع کشی می‌باشد. با تغییر متغیر $x=e^z$ به معادله با ضرایب ثابت $\frac{d^2y}{dz^2}+(1-1)\frac{dy}{dz}-y=4e^{-z}$ تبدیل می‌شود.

$t^2-1=0\Rightarrow t=\pm1\ ,\ y_p=Aze^{-z}$

$y'_p=Ae^{-z}(1-z)\ ,\ y''_p=Ae^{-z}(z-2)$

با جایگذاری داریم:

$Ae^{-z}(z-2)-Aze^{-z}=4e^{-z}\Rightarrow A=-2$

$y_p=-2ze^{-z}\Rightarrow y_p=-\frac{2}{x}Lnx$

132. معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{2s+3}{s(s^2-1)}$ برابر است با:

1) $-3+\frac{5}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}$ 2) $3(\frac{5}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t})$

3) $3\cos(t)+2\sin(t)$ 4) $3-3\cos(t)+2\sin(t)$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$L^{-1}\frac{2s+3}{s(s^2-1)}=2\ L^{-1}\frac{1}{s^2-1}+3\ L^{-1}\frac{1}{s(s^2-1)}$$

$$=2\sinh t+3\int_0^t \sinh r dr=2\sinh t+3\cosh t-3$$

$$=e^t-e^{-t}+\frac{3}{2}e^t+\frac{3}{2}e^{-t}-3=-3+\frac{5}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}$$

133. اگر $\mu(x,y)$ عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$ باشد. حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\mu(x,y)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{10}$ 3) $\frac{1}{15}$ 4) $\frac{1}{20}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

معادله دیفرانسیل مورد نظر یک معادله همگن است و دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu(x,y)=\frac{}{xP+yQ}$است. بنابراین

$\mu(x,y)=\frac{1}{x^3+xy^2}$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\mu=\frac{1}{10}$.

134. **معادله دیفرانسیل** $yy'=2x^3\cos x^2+\frac{y^2}{x}$ **با شرط** $y(\sqrt{\pi})=0$ **کدام است؟**

1) $y^2=x\cos x^2$ 2) $y^2=x\sin x^2$ 3) $y^2=2x^2\cos x^2$ 4) $y^2=2x^2\sin x^2$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

تغییر متغیر $y^2=z$ را اعمال می‌کنیم.

$y^2=z$

معادله خطی

$$2yy'=z'\Rightarrow\frac{z'}{2}=2x^3\cos x^2+\frac{z}{x}\Rightarrow z'-\frac{2}{x}z=4x^3\cos x^2$$

$$z=e^{-\int-\frac{2}{x}dx}\left(\int 4x^3\cos x^2 e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+c\right)\Rightarrow z=e^{2\mathrm{Ln}x}\left(\int 4x^3\cos x^2 e^{-2\mathrm{Ln}x}dx+c\right)$$

$$\Rightarrow z=x^2\left(\int 4x\cos x^2dx+c\right)=x^2(2\sin x^2+c)$$

$$y^2=z\Rightarrow y^2=x^2(2\sin x^2+c)\ ,\ y(\sqrt{\pi})=0\Rightarrow c=0$$

$$y^2=2x^2\sin x^2$$

135. **تبدیل معکوس تابع** $F(s)=\frac{1}{s^3(s^2+1)}$ **کدام است؟**

1) $\frac{1}{2}t^2+\cos t-1$ 2) $\frac{1}{2}t^2-\cos t-1$ 3) $\frac{1}{2}t^2-\cos t+1$ 4) $\frac{1}{2}t^2+\cos t+1$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$F(s)=\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t^2}{2}-1+\cos t$$

است از:

1) $\frac{3}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ و 1 3) صفر و $\frac{1}{2}$ 4) صفر و 1

حل:گزینه (۳) صحیح است.

$$y''+\frac{1+6x}{2x(1+x)}y'+\frac{1}{x(1+x)}y=0$$

$$g(x)=\frac{1+6x}{2(1+x)}\ ,\ h(x)=\frac{x}{1+x}$$

$$r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0\Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0\Rightarrow r=0\ ,\ \frac{1}{2}$$

.137 **جواب معادله انتگرال** $e^{-x}=y(x)+2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$ **کدام است؟**

1) $(x-1)^2e^{-z}$ 2) $(x-1)^2e^{x}$ 3) $(x+1)^2e^{-x}$ 4) $(x+1)^2e^{x}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\,[e^{-x}]=L[y(x)]+2\,L\,[\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s+1}=Y+2L[\cos x].\ L[y(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s+1}=Y+\frac{2s}{s^2+1}Y=(\frac{s^2+2s+1}{s^2+1})Y$$

$$\Rightarrow Y=\frac{s^2+1}{(s+1)^3}=\frac{(s+1)^2-2(s+1)+2}{(s+1)^3}$$

$$y=e^{-x}L^{-1}\frac{s^2-2s+2}{s^3}=e^{-x}(1-2x+x^2)=(x-1)^2e^{-x}$$

.138 **معادله دسته خم‌هایی را بیابید که تکه واقع بر خط مماس بر آن‌ها بین نقطه تماس و محل تلاقی با محور xها، توسط محور y نصف شود.**

1) دسته سهمی $y=ax^2$ 2) دسته سهمی $y^2=ax$

3) دسته سهمی $y=a+x^2$ 4) دسته دایره $x^2+y^2=a$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

با رسم شکل به ازای $a=1$ متوجه می‌شویم که فقط گزینه (2) می‌تواند صحیح باشد.

139. اگر معادله دیفرانسیل $x^3y^3(2ydx+xdy)=5ydx+7xdy$ دارای فاکتور انتگرالی به شکل $x^{\alpha}y^{\beta}$ باشد. **اعداد α و β کدام است؟**

1) $\alpha=-\frac{8}{3}$ و $\beta=-\frac{10}{3}$

2) $\alpha=-\frac{10}{3}$ و $\beta=-\frac{8}{3}$

3) $\alpha=-\frac{8}{3}$ و $\beta=\frac{10}{3}$

4) $\alpha=\frac{10}{3}$ و $\beta=-\frac{8}{3}$

$$2x^3y^4dx+x^4y^3dy-5ydx-7xdy=0$$

$$\Rightarrow (2x^3y^4-5y)dx+(x^4y^3-7x)dy=0$$

فاکتور انتگرال $F=x^{\alpha}y^{\beta}$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم.

$$(2x^{\alpha+3}y^{\beta+4}-5x^{\alpha}y^{\beta+1})dx+(x^{\alpha+4}y^{\beta+3}-7x^{\alpha+1}y^{\beta})dy=0$$

شرط برقراری معادله کامل را می‌نویسیم : $(P_y=Q_x)$

$$P_y=2(\beta+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+3}-5(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$Q_x=(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+3}-7(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$P_y=Q_x\Rightarrow\begin{cases}2\beta+8=\alpha+4\\-5\beta-5=-7\alpha-7\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha-2\beta=4\\7\alpha-5\beta=-2\end{cases}\quad\Rightarrow\alpha=-\frac{8}{3}\,,\,\beta=-\frac{10}{3}$$

140. **در معادله دیفرانسیل** $x^2y''+3xy'+y=0$ **داریم** $y(1)=0$ **و** $y'(1)=1$، **مقدار** $y(e)$ **کدام است؟**

1) $2e$ 2) e 3) e^{-1} 4) $2e^{-1}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

معادله یک معادله دیفرانسیل کشی – اویلر است.

$a=3\ ,\ b=1$

معادله شاخص

$$r^2+(a-1)\mu+b=0\Rightarrow r^2+2r+1=0$$

$$\Rightarrow (r+1)^2=0\Rightarrow r_1=r_2=-1\Rightarrow y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x}Lnx$$

$$y(1)=0\Rightarrow c_1=0\ ,\ y'(1)=1\Rightarrow c_2=1\Rightarrow y=\frac{Lnx}{u}\ ,\ y(e)=\frac{1}{e}$$

141. هرگاه معادله دیفرانسیل $y''-xy=0$ به روش سری توانی $y=\sum_{n=0} a_n x^n$ حل شود، آن‌گاه فرمول بازگشتی برای ضرایب عبارت است از:

1) $a_{n+3}=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 2) $a_{n+3}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}$

3) $a_{n+2}=\frac{-a_{n+1}}{(n+3)(n+4)}$ 4) $a_{n+4}=\frac{a_{n+1}}{(n+3)(n+4)}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} \ , \ y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+4}x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+2}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}[(n+4)(n+3)a_{n+4}-a_{n+1}]=0$$

$$\Rightarrow (n+4)(n+3)a_{n+4}-a_{n+1}=0 \Rightarrow a_{n+4}=\frac{a_{n+1}}{(n+3)(n+4)}$$

142. هرگاه $F(p)=\frac{1}{p^2}\times\frac{p+3}{p^2+9}$ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ باشد. حاصل $\int_0^{+\infty} e^x f(x)$ کدام است؟

1) $-\frac{2}{5}$ 2) $-\frac{1}{5}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{2}{5}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$L\ [f(x)]=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx=F(p)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^x f(x)dx = L[f(x)]_{p=-1}=F(-1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

143. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0$ عبارت است از؟

1) $x-\arctan\frac{y}{x}=c$ 2) $y-\arctan\frac{y}{x}=c$

3) $x+\arctan\frac{y}{x}=c$ 4) $y+\arctan\frac{y}{x}=c$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$(x^2+y^2+y)dx - xdy = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)dx = xdy - ydx$

$$\Rightarrow \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = dx \Rightarrow d(\tan^{-1}\frac{y}{x}) = d(x)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x} = x + c_1 \Rightarrow x - \tan^{-1}\frac{y}{x} = -c_1 = c$$

144. **به ازای چه مقدار β، جواب مسئله مقدار اولیه** $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0 \\ y(0) = \beta \ , \ y'(0) = 2 \end{cases}$ **وقتی $t \to \infty$ به صفر میل می‌کند.**

1) $\beta = 2$ 2) $\beta = 1$ 3) $\beta = -1$ 4) $\beta = -2$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2 \ , \ -1$$

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$$

برای این‌که $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ باشد، باید مقدار $c_1 = 0$ به دست آید.

$$y(0) = \beta \Rightarrow \beta = c_1 + c_2 = c_2 \ , \ y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = 2c_1 - c_2 = -c_2$$

145. **فرض کنید y_1 و y_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل $2t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} - y = 0 \ , \ t > 0$ باشند. مقدار $w(y_1, y_2)(1)$ کدام‌یک از موارد زیر است؟**

1) $-\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

معادله مورد نظر یک معادله کشی – اویلر است.

$$t^2y'' + \frac{3}{2}ty' - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \ , \ \beta = -\frac{1}{2}$$

معادله شاخص $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$

$$\Rightarrow (r+1)(r - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \ , \ r_2 = -1 \Rightarrow y = c_1t^{-1} + c_2t^{\frac{1}{2}}$$

$$w = y_1y_2' - y_2y_1' = t^{-1}\frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\frac{1}{t^2}\Big|_{t=1} = \frac{3}{2}$$

$$2(x-2)^2 xy'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

1) $r_1 = -1$ و $r_2 = 0$ 2) $r_1 = 0$ و $r_2 = 1$

3) $r_1 = -1$ و $r_2 = 1$ 4) $r_1 = 1$ و $r_2 = 2$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2} y' + \frac{1}{2(x-2)x} y = 0$$

$$g(x) = \frac{3x}{2(x-2)^2}\ ,\ h(x) = \frac{x}{2(x-2)}$$

$g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی هستند.

$$r^2 + (g(0)-1)r + h(0) = 0 \Rightarrow r^2 - r = 0 \Rightarrow r = 0\ ,\ 1$$

147. **اگر** $y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(x)\,dx = 0$ **و** $y(0) = 1$، **آن‌گاه** $y(t)$ **برابر است با:**

1) $e^{-t}(1-t)$ 2) $e^{-t}(1+t)$ 3) $e^{t}(1-t)$ 4) $e^{t}(1+t)$

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L(y') + 2\,L(y) + L\left(\int_0^t y(x)dx\right) = 0$$

$$\Rightarrow Y - y(0) + 2Y + \frac{1}{s} Y = 0$$

مقدار $y(0) = 1$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$Y(s + \frac{1}{x} + 2) = 1 \Rightarrow Y(\frac{s^2 + 2x + 1}{s}) = 1$$

$$\Rightarrow Y = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}(Y) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t} - te^{-1} = (1-t)e^{-t}$$

148. **با استفاده از تغییر متغیر تابع** $y = e^{\int z(x)dx}$ **معادله دیفرانسیل** $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ **به چه صورت در می‌آید؟**

1) $x^2 x' - 2xz = 1$ 2) $x^2 z' - 2x^2 z^2 = 1$ 3) $x^2 z' + 2xz = 1$ 4) $x^2 z' + 2x^2 z^2 = 1$

$$y = e^{\int zdx} \Rightarrow y' = ze^{\int zdx} \Rightarrow y'' = z'e^{\int zdx} + z^2 e^{\int zdx}$$

y، y' و y'' را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x^2 e^{\int zdx}(z'e^{\int zdx} + z^2 e^{\int zdx}) = (e^{f\int zdx} - xze^{\int zdx})^2$$

$$\Rightarrow e^{2\int zdx}(x^2 z' + x^2 z^2) e^{2\int zdx}(1 + x^2 z^2 - 2xz)$$

$$\Rightarrow x^2 z' + x^2 z^2 = 1 + x^2 z^2 - 2xz \Rightarrow x^2 z' + 2xz = 1$$

149. **ریشه‌های شاخص معادله دیفرانسیل** $2xy'' + y' - y = 0$ **کدام‌اند؟**

1) $-\frac{2}{3}$ و صفر 2) $-\frac{1}{3}$ و صفر 3) $\frac{1}{3}$ و صفر 4) $\frac{2}{3}$ و صفر

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$y'' + \frac{1}{3x}y' - \frac{1}{3x}y = 0 \qquad g(x) = \frac{1}{3},\ h(x) = -\frac{x}{3}$$

$g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی هستند.

معادله شاخص $r^2 + (g(0) - 1)\mu + h(0) = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{2}{3}r = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = \frac{2}{3}$

150. **در معادله دیفرانسیل** $x^2(x-2)^3 y'' - x(x-2)^2 y' + y = 0$ **نوع نقاط منفرد (تکین) کدام است؟**

1) $x = 0$ و $x = 2$ هر دو تکین منظم هستند.

2) $x = 0$ و $x = 2$ هر دو تکین نامنظم هستند.

3) $x = 0$ تکین نامنظم و $x = 2$ تکین منظم است.

4) $x = 0$ نقطه تکین منظم و $x = 2$ نقطه تکین نامنظم است.

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$y'' - \frac{1}{x(x-2)}y' + \frac{1}{x^2(x-2)^3}y = 0 \qquad g(x) = \frac{-1}{(x-2)},\ h(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$$

نقاط $x_0 = 0, 2$ نقاط تکین معادله هستند و بقیه نقاط جزءنقاط عادی محسوب می‌شوند. نقطه $x_0 = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$g(x) = -\frac{1}{x-2},\ h(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$$

توابع $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی هستند. لذا $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است. حال نقطه $x = 2$ را بررسی می‌کنیم.

$$g(x) = -\frac{1}{x},\ h(x) = \frac{1}{x^2(x-2)}$$

با توجه به این که نقطه $x_0=2$ مخرج $\frac{}{x^2(x-2)}$ را صفر می کند، بنابراین تکین نامنظم است.

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-x}\sin y}{e^{-x}\cos y+2y}\Rightarrow e^{-z}\sin y dx-(e^{-x}\cos y+2y)dy=0$$

$$P=e^{-x}\sin y\ ,\ Q=-e^{-x}\cos y-2y$$

معادله کامل است.

$$P_y=e^{-x}\cos y\ ,\ Q_x=e^{-x}\cos y\Rightarrow P_y=Q_x$$

$$u=\int e^{-u}\sin y dx=-e^{-x}\sin y+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{-x}\cos y+f'(y)=-e^{-x}\cos y-2y\Rightarrow f(y)=-y^2\Rightarrow -e^{-z}\sin y+f(y)=c$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\sin y-y^2=c$$

151. **اگر** $x^{\alpha}y^{\beta}$ **فاکتور انتگرال معادله** $x^2y^3+(x+xy^2)y'=0$ **باشد.** α **و** β **به ترتیب چقدر است؟**

1) -3 و -1 2) -1 و -3 3) -3 و 1 4) -1 و 3

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$F=x^{\alpha}y^{\beta}$ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم، بنابراین معادله به یک معادله کامل تبدیل می‌شود و باید رابطه $P_y=Q_x$ برقرار باشد.

$$x^2y^3dx+(x+xy^2)dy=0$$

$$\Rightarrow x^{\alpha+2}y^{\beta+2}dx+(x^{\alpha+1}y^{\beta}+x^{\alpha+1}y^{\beta+2})dy=0$$

$$\Rightarrow P=x^{\alpha+2}y^{\beta+3}\ ,\ Q=x^{\alpha+1}y^{\beta}+x^{\alpha+1}y^{\beta+2}$$

$$P_y=(\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}=Q_x=(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}+(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

$$\Rightarrow \alpha+1=0\ ,\ \beta+3=0\Rightarrow \alpha=-1\ ,\ \beta=-3$$

152. **تبدیل لاپلاس** $f(t)=t\sin(2t)$ **کدام است؟**

1) $\frac{-4}{(s^2+4)^2}$ 2) $\frac{4}{(s^2+4)^2}$ 3) $\frac{-4s}{(s^2+4)^2}$ 4) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$f(t) = t\sin(2t)$

$$L\,[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow L\,[t\sin 2t] = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

.153 معکوس تبدیل لاپلاس $F(x) = \dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$ کدام است؟

1) $f(t) = 4e^{-3t} - e^{t}$

2) $f(t) = 4e^{3t} - e^{-t}$

3) $f(t) = 4e^{-3t} + e^{t}$

4) $f(t) = 4e^{3t} + e^{-t}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$F(s) = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{4}{s-3} + \frac{-1}{s+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[F(s)] = 4\,L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \Rightarrow f(t) = 4e^{3t} - e^{-t}$$

.154 جوابی از معادله دیفرانسیلی $y'' + y'^2 \cos y = 0$ عبارت است از:

1) $x = c_1\int e^{\sin x}dx + c_2$

2) $x = c_1\int e^{\sin}dy + c_2$

3) $y = c_1\int e^{\csc x}dx + c_2$

4) $x = c_1\int e^{\csc y}dy + c_2$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

طرفین معادله را بر y' تقسیم می‌کنیم. $(y' \neq 0)$

$$\frac{y''}{y'} + y'\cos y = 0 \Rightarrow d(Lny') + d(\sin y) = 0$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} Lny' + \sin y + a_0 \Rightarrow Lny' = a_0 - \sin y$$

$$\Rightarrow y' = e^{a_0 - \sin y} = e^{a_0} \times e^{-\sin y} \Rightarrow e^{\sin y}y' = e^{a_0} = b$$

$$e^{\sin y}dy = bdx \Rightarrow \int e^{\sin y}dy = bx + c$$

$$\Rightarrow bx = \int e^{\sin y}dy - c \Rightarrow x = \frac{1}{b}\int e^{\sin y}dy - \frac{c}{b}$$

با فرض $\frac{1}{b} = c_1$ و $-\frac{c}{b} = c_2$ جواب عمومی به صورت زیر است:

$$x = c_1\int e^{\sin y}dy + c_2$$

$y_2(x)=x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,x)$ و $y_1=F(a,b,c,x)$

نمایش داده می‌شود. در این صورت جواب‌های معادله $x(1-x)y''+(\frac{1}{2}-2x)y'-\frac{1}{4}y=0$ **کدام است؟**

1) $y=c_1F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},x)+c_2\sqrt{x}\,F(1,1,\frac{3}{2},x)$

2) $y(x)=c_1F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},x)+c_2\sqrt{x}F(1,-\frac{3}{2},1,x)$

3) $y(x)=c_1F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},x)+c_2\sqrt{x}F(1,1,-\frac{3}{2},x)$

4) $y(x)=c_1F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},x)+c_2\sqrt{x}F(1,\frac{3}{2},1,x)$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow y_1=F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},x)\ ,\ y_2=x^{\frac{1}{2}}F(1,1,\frac{3}{2},x)$$

بنابراین گزینه (1)صحیح است.

156. **می‌دانیم که** $(x^{-\upsilon}J_\upsilon(x))'=-x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)$ ، $(x^{\upsilon}J_\upsilon(x))=x^{\upsilon}J_{\upsilon-1}(x)$ ، $J_{\upsilon-1}(x)+J_{\upsilon+1}(x)=\frac{2\upsilon}{x}J_\upsilon(x)$ **و** $2J'_\upsilon(x)=J_{\upsilon-1}(x)-J_{\upsilon+1}(x)$ ، **حال انتگرال** $I=\int J_0(x)\cos x dx$ **برابر است با:**

1) $I=xJ_0(x)\cos x+xJ_0(x)\sin x+c$

2) $I=xJ_0(x)\cos x-xJ_0(x)\sin x+c$

3) $I=xJ_0(x)\cos x+xJ_1(x)\sin x+c$

4) $I=xJ_0(x)\cos x-xJ_1(x)\sin x+c$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$I=\int J_0(x)\cos x dx$$

انتگرال را به روش جزءبه‌جزء حل می‌کنیم.

$$dx=d\upsilon\Rightarrow x=\upsilon$$

$$J_0\cos x=u\Rightarrow -J_1\cos x-J_0\sin x=du$$

$$\Rightarrow I=xJ_0\cos x+\int xJ_1\cos x dx+\int xJ_0\sin x dx \qquad (1)$$

$$\int xJ_1\cos x dx\ ,\ u=xJ_1\Rightarrow du=xJ_0$$

$$\cos x dx=d\upsilon\Rightarrow \upsilon=\sin x\Rightarrow \int xJ_1\cos x dx=xJ_1\sin x-\int xJ_0\sin x dx \ (2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow I=xJ_0\cos x+xJ_1\sin x$

157. **جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه** $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=e^t$ ، $\frac{dx}{dt}+y=0$ ، $y(0)=0$ ، $x'(0)=0$ **و** $x(0)=1$ **عبارت است از:**

1) $y(t)=e^t$ و $x(t)=2+e^t$ 2) $y(t)=e^{-t}$ و $x(t)=2+e^{-t}$

3) $y(t)=e^{-t}$ و $x(t)=2-e^t$ 4) $y(t)=e^t$ و $x(t)=2-e^t$

حل: صورت سوال نادرست است. توجه کنید $y(0)=0$ **در هیچ‌کدام از گزینه‌ها صدق نمی‌کند.**

158. **جواب معادله انتگرالی** $y(t)=3t+\int_0^t y(p)\sin(t-p)dp$ **عبارت است از:**

1) $t+\frac{1}{2}t^3$ 2) $t+t^3$ 3) $3t+\frac{1}{2}t^3$ 4) $3t+t^3$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L[y(t)]=3\,L[t]+\,L\left[\int_0^t y(p)\sin(t-p)dp\right]\Rightarrow Y(s)=\frac{3}{s^2}+L[y(t)]\,.\,L[\sin t]$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{3}{s^2}+Y(s)\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow Y(s)\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)=\frac{3}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=3\left(\frac{s^2+1}{s^4}\right)=\frac{3}{s^2}+\frac{3}{s^4}$$

$$\Rightarrow y(t)=3\,L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+3\,L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]$$

$$\Rightarrow y(t)=3t+\frac{1}{2}t^3$$

159. **ممان k ام رادیکال‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود. حاصل** $\sum_{n=2}^{\infty}nR_{n-1}$ **کدام گزینه است؟**

$$\lambda_k=\sum_{n=1}^{\infty}n^kR_n$$

1) λ_0 2) λ_1 3) $\lambda_1\lambda_0$ 4) $\lambda_1+\lambda_0$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$\lambda_k=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^kR_{n-1}$$

$$k=1 \Rightarrow \lambda_1 = \sum_{n=2} (n-1)R_{n-1} = \sum_{n=2} nR_{n-1} - \sum_{n=2} R_{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} nR_{n-1} = \lambda_1 + \sum_{n=2}^{\infty} R_{n-1} = \lambda_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n = \lambda_1 + \lambda_0$$

160. **برای حل معادله برنولی $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$ اگر از تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ استفاده شود، فاکتور انتگرال حل چقدر است؟**

1) $e^{\int pdx}$ 2) $(1-n)e^{\int pdx}$ 3) $e^{(1-n)\int pdx}$ 4) $\frac{1}{1-n} e^{\int pdx}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

معادله برنولی با تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ به یک معادله خطی تبدیل شده و دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu = e^{(1-n)\int P(x)dx}$ است.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \Rightarrow y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

$$u = y^{1-n} \Rightarrow u' = (1-n)y'y^{-n} \Rightarrow y'y^{-n} = \frac{u'}{1-n}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{u'}{1-n} + P(x)u = Q(x) \Rightarrow u' + (1-n)P(x)u = Q(x)$$

عامل (فاکتور) انتگرال‌ساز

$$\Rightarrow \mu = e^{(1-n)\int P(x)dx}$$

161. **جواب خاص معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن زیر کدام است؟**

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2x+1$$

1) $0/5x+1$ 2) $0/5x-1$ 3) $0/5x^2+x$ 4) $0/5x^2-x$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$t=0$ یک بار ریشه معادله مسفر است. لذا:

$$y_p = x(Ax+B)\ ,\ y' = 2Ax+B\ ,\ y'' = 2A\ ,\ y''' = 0$$

$$0+4A+4Ax+2B \equiv 2x+1 \Rightarrow A = 0/5\ ,\ B = -1$$

$$y_p = 0/5x^2 - x$$

$$I_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!(k+p)!}\ ,\ J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!(k+p)!}$$

اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد، کدام گزینه ارتباط این دو تساوی را نشان می‌دهد؟

1) $I_p(x)=J_p(ix)$ 2) $I_p(x)=iJ_p(ix)$

3) $I_p(x)=iJ_p(i^p x)$ 4) $I_p(x)=(i)^{-p}J_p(ix)$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$J_p(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{ix}{2})^{2k+p}}{k!(k+p)!}=i^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^{2k}(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!(k+p)!}$$

$$i^{2k}(-1)^k=(i^2)^k(-1)^k=(-1)^k(-1)^k=1$$

$$\Rightarrow J_p(ix)=i^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!(k+p)!}=i^pI_p(x)\Rightarrow I_p(x)=(i)^{-p}J_p(ix)$$

163. **نوع نقطه بحرانی $(0\ ,\ 0)$ برای دستگاه** $\begin{cases}y_1'=y_2\\ y_2'=-4y_1\end{cases}$ **کدام است.**

1) گره 2) مرکز 3) نقطه زینی 4) نقطه مارپیچی

حل: گزینه (۲) صحیح است.

دستگاه به صورت $\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ است و نقطه بحرانی آن $(0\ ,\ 0)$ می‌باشد. مقادیر ویژه را به دست آورید.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}-\lambda&1\\-4&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+4=0\Rightarrow\lambda=\pm2i$$

مقادیر ویژه موهومی محض بوده و نقطه $(0\ ,\ 0)$ مرکز و پایدار است.

164. **برای مسئله اشتورم – لیوویل** $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=0\ ,\ y(\pi)=0\end{cases}$ **ویژه مقدارها و ویژه توابع کدام هستند؟**

1) $\lambda=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ ...$ و $y=\cos\lambda x$ 2) $\lambda=0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ ...$ و $y=\cos\sqrt{\lambda x}$

3) $\lambda=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ ...$ و $y=\sin\lambda x$ 4) $\lambda=1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ ...$ و $y=\sin\sqrt{\lambda x}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$\mathbf{l}=\pi\ ,\ \lambda=\frac{n\pi}{\mathbf{l}}\Rightarrow\lambda=n$$

با توجه به مقادیر اولیه گزینه (3) صحیح است.

.165 تابع $F(s)=\frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{3})}$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است. $f(t)$ کدام است؟

1) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{6}}e^{(\sqrt{3}-\sqrt{2})t}$

2) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{2}t})$

3) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}t}-e^{\sqrt{3}t})$

4) $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}e^{(\sqrt{2}-\sqrt{3})t}$

حل: گزینه (۲) صحیح است.

کسر $F(s)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$F(s)=\frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{3})}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{s+\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{s-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}L^{-1}[\frac{1}{s-\sqrt{3}}-\frac{1}{s+\sqrt{2}}]=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(e^{\sqrt{3}t}-e^{-\sqrt{2}t})=f(t)$$

.166 تبدیل لاپلاس z را $\bar{z}$ بنامید. این مسئله $\begin{cases} t\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}+tz=0 \\ z(0)=0\,,\ \frac{dz}{dt}(0)=1 \end{cases}$ ، $\bar{z}$ کدام است؟

1) $\bar{z}=\frac{1}{(s^2+1)}+c$ ، $c>0$ دلخواه

2) $\bar{z}=\frac{s}{s^2+1}+c$ ، c دلخواه

3) $\bar{z}=\frac{s}{s^2-1}+c$ ، c دلخواه

4) $\bar{z}=\frac{1}{[c(s^2+1)]^{\frac{3}{2}}}$ ، $c>0$ دلخواه

حل: گزینه (۴) صحیح است.

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L[tz'']-L[z']+L[tz]=0\Rightarrow -(s^2\bar{z}-sz(0)-z'(0))'-(s\bar{z}-z(0))-\bar{z}'=0$$

مقادیر اولیه را جایگزین می‌کنیم:

$$-(s^2\bar{z}-1)'-(s\bar{z})-\bar{z}'=0\Rightarrow -2s\bar{z}-s^2\bar{z}'-s\bar{z}-\bar{z}'=0\Rightarrow \bar{z}'(-2s^2-1)=3s\bar{z}$$

معادله تفکیک‌پذیر

$$\Rightarrow \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}=-3\frac{s}{s^2+1}$$

از طرفین معادله فوق انتگرال می‌گیریم:

$$Ln\bar{z}=-\frac{3}{2}Ln(s^2+1)+c_1$$

با فرض $c_1 = -\frac{3}{2}\text{Lnc}$ و [illegible] داریم.

$$\text{Ln}\bar{z} = -\frac{3}{2}\text{Ln}(s^2+1) - \frac{3}{2}\text{Lnc} = -\frac{3}{2}\text{Lnc}(s^2+1) \Rightarrow \bar{z} = e^{-\frac{3}{2}\text{Lnc}(s^2+1)} = e^{\text{Ln}[c(s^2+1)]^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{[c(s^2+1)]^{\frac{3}{2}}}$$

167. **جواب مسئله مقدار اولیه** $\begin{cases} 4y'' - 3y = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2}\ ,\ y'(0) = a \end{cases}$ **وقتی** $t \to +\infty$ **به صفر میل می‌کند. مقدار a کدام است؟**

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$4y'' - 3y = 0 \xrightarrow{\text{معادله شاخص}} 4t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = c_1 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

برای این‌که جواب مسئله وقتی $t \to +\infty$ به صفر میل کند ($\lim_{t\to+\infty} y = 0$) باید مقدار $c_1 = 0$ به دست آید، در غیر این صورت $\lim_{t\to+\infty} y \to \infty$.

شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$y(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = c_1 + c_2 \qquad (1)$$

$$y = c_1 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \Rightarrow y' = c_1\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} - c_2\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$y'(0) = a \Rightarrow a = c_1\frac{\sqrt{3}}{2} - c_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c_1 - c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}a \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 - c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}a \end{cases} \Rightarrow 2c_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}a \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{\sqrt{3}}$$

با توجه به این که اگر $c_1 = 0$ باشد، $\lim_{t\to+\infty} y = 0$ داریم:

$$c_1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

168. **جواب معادله دیفرانسیل** $2x^2y''+x(2x-1)y'+y=0$ **را به صورت** $y=\sum\limits_{n=0} a_n x^{n+r}$ **می‌نویسیم. مقادیر r کدام‌اند؟**

1) $-\frac{1}{2}$ و -1 2) $\frac{1}{2}$ و -1 3) $-\frac{1}{2}$ و 1 4) $\frac{1}{2}$ و 1

حل: گزینه (۴) صحیح است.

$$y''+\frac{2x-1}{2x}y'+\frac{1}{2x^2}y=0,\ g(x)=\frac{2x-1}{2},\ h(x)=\frac{1}{2}$$

نقطه $x=0$ نقطه تکین منظم است. معادله شاخص برابر است با:

$$r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0\Rightarrow r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0\Rightarrow (r-\frac{1}{2})(r-1)=0\Rightarrow r_1=1 \text{ و } r_2=\frac{1}{2}$$

169. **توابع** $y_1=\sqrt{x}$ **و** $y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل** $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ **هستند. p(x) و q(x) کدام‌اند؟**

1) $p(x)=x^{-1}$ و $q(x)=-\frac{1}{4}x^{-2}$ 2) $p(x)=x^{-1}$ و $q(x)=x^{-2}$

3) $p(x)=4x^{-1}$ و $q(x)=x^{-2}$ 4) $p(x)=x$ و $q(x)=x^2$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$y_1=\sqrt{x}$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+\frac{p}{2\sqrt{x}}+q\sqrt{x}=0$$

تنها گزینه‌ای که در رابطه فوق صدق کند، گزینه (1) می‌باشد.

$$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{x}}{x^2}=-\frac{\sqrt{x}}{4x^2}+\frac{\sqrt{x}}{2x^2}-\frac{\sqrt{x}}{4x^2}=0$$

170. **برای کدام مقدار a، معادله دیفرانسیل** $(x^{-1}+y^{-1})dx+axy^{-2}dy=0$ **کامل است؟**

1) -2 2) -1 3) 1 4) 2

حل: گزینه (۲) صحیح است.

$$P(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ Q(x)=\frac{ax}{y^2}$$

برای این‌که معادل کامل باشد، باید $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$$P_y = -\frac{\quad}{y^2} = Q_x = \frac{\quad}{y^2} \Rightarrow a = -1$$

171. **روابط بین ضرایب جواب سری** $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ **معادله** $xy'' - y' + y = 0$ **کدام‌اند؟**

1) $a_0 = a_1 = 0$ ، a_2 دلخواه و $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(n+1)(n-1)}$ برای $n \geq 2$

2) a_0 و a_1 دلخواه و $a_n = -\dfrac{a_0}{(n+1)(n-1)}$ ، $n \geq 2$

3) $a_0 = a_1 = a_2$ و $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(n+1)(1-n)}$ ، $n \geq 2$

4) $a_0 = 0$ ، $a_2 = a_1$ و $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(n+1)(n-1)}$ ، $n \geq 2$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,\; y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,,\; y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y، y' و y'' را در معادله قرار می‌دهیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(n+1)na_{n+1} - (n+1)a_{n+1} = -a_n \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)(n-1)}$$

x^{-1} ضریب $\Rightarrow 0a_0 - 0a_0 = 0$

x^0 ضریب $\Rightarrow 0a_1 - a_1 + a_0 = 0$

a_2 دلخواه

x ضریب $\Rightarrow 2a_2 - 2a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

با جایگذاری در رابطه بالاتر نتیجه می‌گیریم $a_0 = 0$.

172. **معادله دیفرانسیل** $y'' + cy' + ky = 0$ **تحت کدام شرط (یا شرایط) مدل حرکت یک سیستم تند میراست؟**

1) $c^2 > 4k$ 2) $c^2 = 4k$ 3) $c^2 < 4k$ 4) $c > 0$ و $k > 0$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

معادله شاخص به صورت $t^2 + 2c + k = 0$ است.

$$\Delta = c^2 - 4k < 0 \Rightarrow c^2 < 4k$$